

# CALIBRAZIONE DEI PARAMETRI DI CONTATTO E DISCRETIZZAZIONE DI PARTICELLE NON SFERICHE PER ANALISI CON IL METODO DEGLI ELEMENTI DISCRETI

Francesco Zarattini (francesco.zarattini@phd.unipd.it)  
Università degli Studi di Padova – Dipartimento ICEA

Fabio Gabrieli (fabio.gabrieli@unipd.it)  
Università degli Studi di Padova – Dipartimento ICEA

**ABSTRACT.** Il Metodo degli Elementi Discreti (DEM) consente di rappresentare i materiali granulari a partire dalla descrizione delle particelle che lo compongono, dalla loro forma, dai modelli e parametri al contatto. Al fine di rappresentare elementi granulari appartenenti a ghiaie, ed in particolar modo volendo replicare con buona approssimazione la loro forma, è possibile adottare una discretizzazione dei corpi tramite aggregati rigidi di sfere (*clumps*). Eseguendo analisi sui materiali naturali in maniera da ricavarne le curve granulometriche, gli angoli di resistenza al taglio e i coefficienti di restituzione elastica, attraverso questo lavoro ci si propone di investigare la calibrazione numerica delle dimensioni e delle forme degli elementi, e dei parametri al contatto dei materiali.

## 1. INTRODUZIONE

L'utilizzo del metodo degli Elementi Discreti per la simulazione di flussi granulari non può prescindere da una corretta mutua calibrazione dei parametri al contatto e delle forme delle particelle. Se infatti le singole particelle di forma irregolare vengono descritte da sfere, pur replicando la granulometria del materiale naturale, deve essere previsto l'inserimento di una resistenza alla rotazione al contatto con il fine di replicare il comportamento di particelle non sferiche. In alternativa a tale approccio, che richiede la calibrazione di parametri non "fisici", in questo lavoro vengono rappresentate le particelle tramite aggregati rigidi di sfere che ne replicano con buona approssimazione le forme naturali. Dato un modello costitutivo al contatto di tipo Hertz-Mindlin, i parametri da calibrare sono limitati all'angolo di attrito al contatto tra i corpi, al modulo di Young e il coefficiente di Poisson, e ai coefficienti di restituzione. La forma delle particelle viene qui ricavata a partire da campioni di particelle di ghiaia riproducendo la superficie di ciascuno di queste attraverso tecniche fotogrammetriche (Zarattini *et al.*, 2019). Successivamente, utilizzando un algoritmo (Amenta *et al.*, 2001) e definendo il numero di sfere con cui discretizzare le particelle vengono determinate le posizioni e le dimensioni di ciascuna sfera che definisce il *clump*. Tramite prove sperimentali vengono misurati i coefficienti di restituzione al contatto. L'angolo di attrito al contatto tra le particelle viene determinato dal confronto degli angoli di natural declivio ottenuti con prove sperimentali e numeriche.

## 2. FORMA DEI GRANI E CURVA GRANULOMETRICA

I materiali granulari scelti per essere riprodotti con il metodo degli elementi discreti sono ghiaie pulite e sono indicati in seguito come M1, M2 ed M3. Alcune caratteristiche di questi materiali sono riportate in Tabella 1.

Tabella 1. Materiali granulari.

	M 1 (Ghiaia grossa)	M 2 (Ghiaia media)	M 3 (Ghiaia media)
Spigoli	Arrotondati	Arrotondati	Vivi
$d_{50}$ [mm]	19.7	12.4	12.6
$C_u$	1.015	1.536	1.478
$C_c$	0.99	0.90	0.89

La discretizzazione dei grani avviene, estratto un campione di particelle per ogni materiale, attraverso la ricostruzione digitale delle superfici, che si serve di scansione delle particelle tramite fotogrammetria. Tale superficie viene successivamente discretizzata da aggregati di sfere. Il set di *clumps* andrà a costituire la matrice

per le particelle numeriche, di cui un esempio è dato in Figura 1. Generato quindi il numero desiderato di *clumps*, vengono assegnate le dimensioni di ciascuna particella in accordo con quelle derivate dalla granulometria del materiale naturale, come possibile osservare in Figura 2.

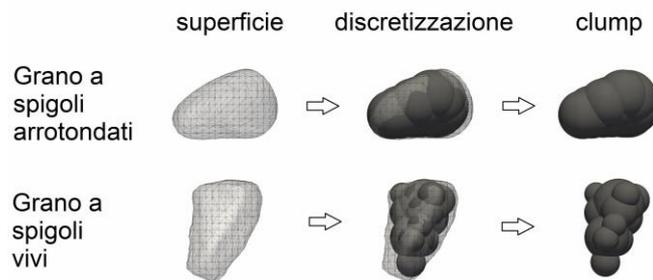


Figura 1. Processo di generazione delle particelle virtuali.

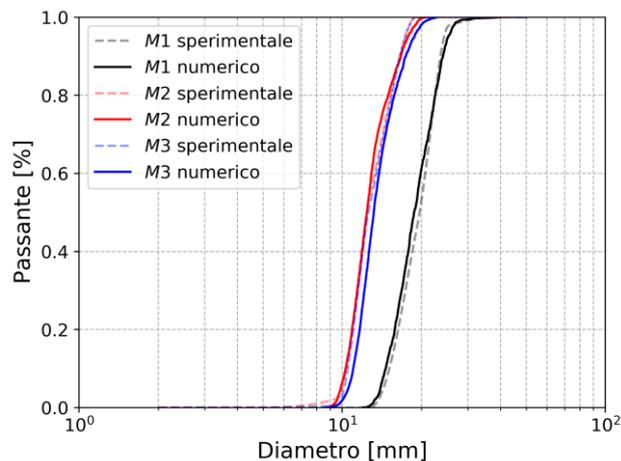


Figura 2. Curve granulometriche dei materiali naturali e di quelli numerici.

### 3. ASSEGNAZIONE DEI PARAMETRI AL CONTATTO

Definite forme e curve granulometriche anche per gli elementi numerici, scelto il modello costitutivo al contatto, rimangono da assegnare ai materiali i parametri di contatto. Il modello costitutivo adottato per i materiali granulari in esame è il modello di Hertz-Mindlin (Johnson, 1985). Trattasi di un modello elastico non-lineare che si fonda sulla teoria di Hertz per la gestione delle forze in direzione normale al piano di contatto tra i corpi in esame, e sulla teoria di Mindlin per la valutazione delle azioni in direzione tangenziale rispetto a tale piano, assunte linearmente dipendenti dal valore dello spostamento tangenziale, e la cui soglia massima viene fornita tramite il criterio di Mohr-Coulomb attraverso un coefficiente di attrito. Il coefficiente di smorzamento viscoso al contatto deriva invece dal valore del relativo coefficiente di restituzione elastica.

#### 3.1 Angoli di attrito al contatto

Al fine di ricavare l'angolo di attrito al contatto per le particelle dei materiali considerati, vengono eseguiti dei test di deposito del materiale granulare. Ciascun materiale viene versato (12 kg per materiale M1, 8 kg per M2 e M3) all'interno di un recipiente cilindrico (diametro interno pari a 14.4 cm) con fondo aperto, e poggiante su di una superficie piana circolare di diametro maggiore di quello del recipiente (26.4 cm per M1, 20.6 cm per M2 e M3). Il cilindro viene sollevato consentendo il deposito del materiale granulare sulla base. La misura degli angoli formati dal deposito rispetto all'orizzontale fornisce i riferimenti per gli angoli che devono assumere i depositi nelle simulazioni DEM.

Come indicato in Figura 3, vengono adottati due angoli di riferimento: l'angolo  $\alpha_1$ , che indica l'angolo massimo formato dal deposito; l'angolo  $\alpha_2$ , che indica l'angolo alla base tra i cateti formati dal raggio del deposito e l'altezza corrispondente. Vengono effettuate due prove di deposizione per ogni materiale, e per ognuna di queste vengono eseguite otto osservazioni in direzioni diverse.

In Figura 3 vengono riportati attraverso linee tratteggiate i valori medi di  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  per i depositi sperimentali. Attraverso i *boxplots* vengono presentati i risultati dei depositi ottenuti tramite le simulazioni attraverso diversi valori dell'angolo di attrito al contatto, indicato con  $\phi_\mu$ .

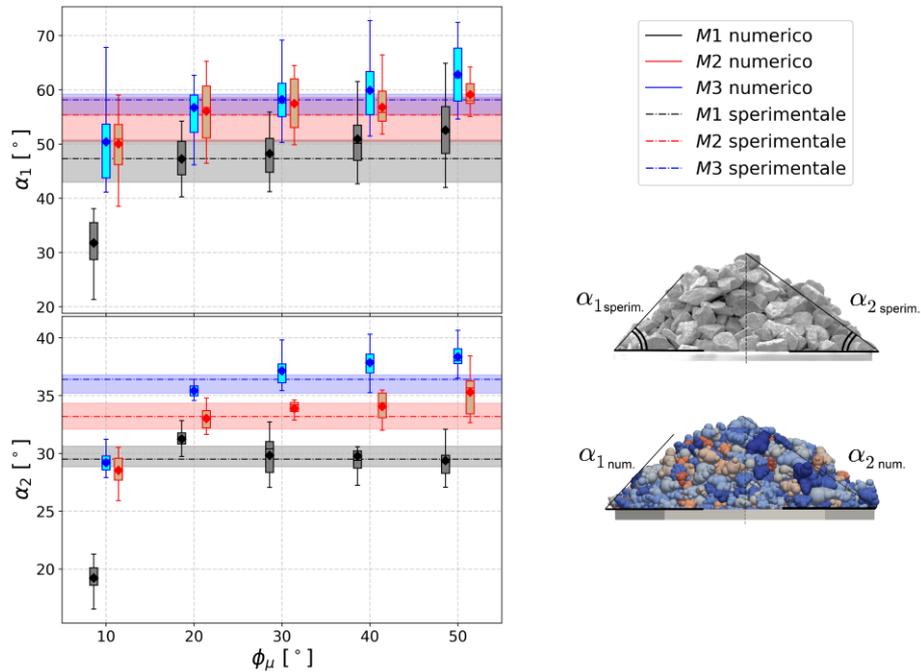


Figura 3. Analisi parametrica dell'effetto dell'angolo di attrito al contatto ( $\phi_\mu$ ) sugli angoli di deposito.

Si nota come, per tutti i materiali indagati, l'angolo  $\alpha_1$  cresce non linearmente all'aumentare di  $\phi_\mu$ . L'angolo  $\alpha_2$  presenta una decrescita per il materiale M1 all'aumentare di  $\phi_\mu$  per valori oltre i  $20^\circ$ . In Eq. 1 viene riportato il criterio per la scelta del valore di  $\phi_\mu$ , che risulta essere pari a  $30^\circ$ .

$$\min(\mu_{\alpha_1}(\phi_\mu) - \mu_{\alpha_{1spe}}) \cup \min(\mu_{\alpha_2}(\phi_\mu) - \mu_{\alpha_{2spe}}) \quad (1)$$

### 3.2 Coefficiente di restituzione elastica

Il coefficiente di restituzione  $e$  per una particella che cade su un piano orizzontale corrisponde al valore del rapporto tra la massima altezza di risalita post-impatto e l'altezza di caduta iniziale. Dal momento che le particelle considerate non hanno forma sferica, non risulta possibile definire  $e$  tramite l'osservazione di particelle che rimbalzano su un piano, e pertanto vengono vincolate tramite un dispositivo a pendolo e fatte collidere una con l'altra (Hlosta, 2018). Due granelli vengono appesi a due cavi, in maniera che i due baricentri giacciono su di un piano ortogonale all'asse del perno attorno al quale sono fatti oscillare. Uno di questi grani (corpo A) viene sollevato mantenendo in tensione il filo che lo sostiene. L'altro (B) risulta in quiete. Rilasciato il corpo A, all'istante che precede l'impatto ( $t^-$ ), viene tracciata la velocità del corpo A. All'istante seguente l'impatto ( $t^+$ ), vengono tracciate le velocità dei corpi A e B (Figura 4). Dalla conservazione della quantità di moto del sistema (Eq. 2) e dal bilancio dell'energia cinetica (Eq. 3) (di cui compare un termine dissipativo dato dall'inelasticità dell'impatto), e ricavata una formulazione del contributo dissipativo funzione del coefficiente di restituzione (Eq. 4), si definisce il valore del coefficiente di restituzione  $e$ .

Sono stati effettuati 90 *test* per ogni tipologia di materiale, utilizzando per ognuno quattro grani differenti e diversi posizionamenti relativi tra le superfici di impatto. Solo gli impatti effettivamente caratterizzati dall'ortogonalità tra il piano passante dai baricentri e l'asse di rotazione sono stati considerati.

In Figura 5 vengono riportati i risultati ricavati per i distinti tipi di materiale. Si osserva come i valori medi del parametro non varino molto tra i vari materiali, essendo  $e$  una caratteristica del materiale piuttosto che della forma. Il valore assegnato ai tre materiali è pari a 0.9.

$$m_A \cdot \mathbf{v}_A^- + m_B \cdot \mathbf{v}_B^- = m_A \cdot \mathbf{v}_A^+ + m_B \cdot \mathbf{v}_B^+ \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \cdot m_A \cdot v_A^{-2} + \frac{1}{2} \cdot m_B \cdot v_B^{-2} = \frac{1}{2} \cdot m_A \cdot v_A^{+2} + \frac{1}{2} \cdot m_B \cdot v_B^{+2} + E_{diss} \quad (3)$$

$$E_{diss} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_A \cdot m_B}{m_A + m_B} \cdot v_{rel}^2 (1 - e^2) \quad (4)$$

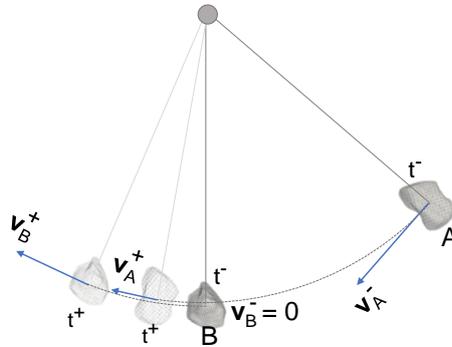


Figura 4. Schema di individuazione delle velocità dei corpi pre e post impatto.

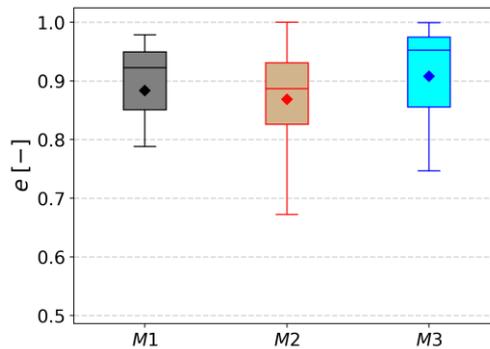


Figura 5. Boxplots del coefficiente di restituzione per i tre materiali.

#### 4. CONCLUSIONE

I parametri calibrati (angolo di attrito al contatto e coefficiente di restituzione), propri del materiale, sono univoci anche per elementi che presentano dimensioni e spigolosità differenti. Al contributo dato dall'angolo di attrito al contatto va a sommarsi il contributo dato dalla forma delle particelle: ecco che quindi, nonostante sia per M1, che per M2 e M3, sia stato calibrato un angolo  $\phi_\mu=30^\circ$ , l'angolo di riposo del deposito assume valori differenti a seconda della forma dei *clumps*. Tanto più il materiale è angoloso quanto più l'angolo di declivio è elevato. In merito al coefficiente di restituzione, esso viene determinato direttamente da prove sperimentali, tramite impatti tra grani in un sistema tipo "pendolo". Il valore ottenuto è univoco per tutti i materiali, essendo questo un parametro non dipendente dalla forma delle particelle. I risultati evidenziano quindi come, per l'approccio con il Metodo degli Elementi Discreti, la discretizzazione della forma dei grani possa ricoprire un ruolo fondamentale nel comportamento globale degli aggregati di particelle.

#### 5. BIBLIOGRAFIA

Amenta, N., Choi, S., Kolluri, R. K. (2001). The power crust, unions of balls, and the medial axis transform, *Int. J. Computational Geometry*. 19, (2-3): 127-153.  
 Hlostá, J., Žurovec, D., Rozbroj, J. et al. (2018). Experimental determination of particle-particle restitution coefficient via double pendulum method. *Chemical Engineering Research and Design*, 135: 222-233.  
 Johnson, K. L. (1985). Contact mechanics, *Cambridge University Press*, Cambridge, UK.  
 Zarattini, F., Pol, A., Schenato, L., et al. (2019). Preliminary numerical and experimental tests for the study of vibration signals in dry granular flows, *VI International Conference on Particle-based Methods – Fundamentals and Applications PARTICLES 2019*, Barcelona, Spain, 305-312.