



UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA

Sede Amministrativa: Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Innovazione Meccanica e Gestionale

SCUOLA DI DOTTORATO DI RICERCA IN: **INGEGNERIA INDUSTRIALE**
INDIRIZZO: **PROGETTAZIONE MECCANICA E INGEGNERIA MOTOCICLISTICA**
CICLO **XXI**

**MODELLAZIONE MULTI-BODY ANALITICA
E SVILUPPO DI STRATEGIE DI CONTROLLO**

Direttore della Scuola : Ch.mo Prof. PAOLO BARIANI

Supervisore :Ch.mo Prof. ROBERTO LOT

Dottorando : MATTEO MASSARO

DATA CONSEGNA TESI
2 febbraio 2009

Curriculum Vitae	4
Sommario	5
Introduzione	6
Capitolo 1: modellazione	9
1.1 Modello del veicolo per la dinamica	9
1.2 Modello del veicolo per la cinetostatica.....	12
1.3 Modello per il calcolo delle rigidzze equivalenti	12
1.4 Modello di interazione pneumatico-strada 3D	15
1.5 Modello di trasmissione flessibile.....	22
1.6 Modello di pilota sospeso.....	24
1.7 Modello degli schemi sospensivi e delle flessibilità concentrate.....	30
1.8 Modello dei corpi vibranti.....	38
1.9 Modello del controllo	40
1.10 Calcolo automatico dell'indice DAE del sistema	50
1.11 Ottimizzazione dell'assetto	51
1.12 Decomposizione della coppia di sterzo	52
Capitolo 2: simulazioni	55
2.1 Calcolo della rigidzza equivalente.....	55
2.2 Calcolo delle componenti della coppia di sterzo.....	59
2.3 Effetto delle flessibilità strutturali sulla stabilità.....	60
2.4 Chatter	66
2.5 Kick-back	71
2.6 Impedenza del pilota	75
Capitolo 3: sulla modellazione delle flessibilità strutturali	81
3.1 Modelli a parametri concentrati per la trave incastrata	82
3.2 Modelli a parametri concentrati per il forcellone e per la forcella.....	87
Conclusioni	88
Bibliografia	89
Indice delle figure	94
Ringraziamenti	96

Curriculum Vitae

Matteo Massaro

- 2006-2008 Dottorato di ricerca in Ingegneria Industriale, indirizzo Progettazione Meccanica e Ingegneria Motociclistica, tesi: *Modellazione multi-body analitica e sviluppo di strategie di controllo*.
- 2008 Internship in Harley-Davidson Motor Co., Milwaukee, WI, USA.
- 2005 Borsa di studio Università di Padova in collaborazione con Aprilia SpA, argomento: *Ricerca numerica e sperimentale sulla stabilità degli scooter*.
- 1999-2004 Laurea in ingegneria meccanica (V.O.) presso l'Università di Padova con votazione 110/110 e lode, tesi: *L'effetto delle flessibilità strutturali sulla stabilità dei motocicli*.

Pubblicazioni

- Bobbo, Cossalter, Massaro, Peretto. Application of the “Optimal Maneuver Method” for enhancing racing motorcycle performance, proc. of the *SAE 2008 Motorsports Engineering Conference*, Concord, North Carolina, USA, December 2-4, 2008.
- Cossalter, Lot, Sartori, Massaro. A Motorcycle Riding Simulator for the Improvement of the Rider Safety, proc. of the *FISITA 2008 World Automotive Congress*, Munich, Germany, 14-19 September.
- Cossalter, Dalla Torre, Lot, Massaro. A multibody tool for the Optimization of the Suspension Setup and Geometric Layout of Racing Motorcycles, proc. of the *FISITA 2008 World Automotive Congress*, Munich, Germany, 14-19 September.
- Cossalter, Lot, Sartori, Massaro. A Motorcycle Guidance Algorithm, proc. of the *4th European Conference on Structural Control*, St.Petersburg, Russia, September 8-12, 2008.
- Cossalter, Lot, Massaro. The chatter of racing motorcycle, *Vehicle System Dynamics*, 46, 339-353, 2008.
- Lot, Massaro, Sartori. Advanced Motorcycle Virtual Rider, *Vehicle System Dynamics*, 46 Supplement, 215-224, 2008.
- Massaro, Lot. Application of Laplace Transform Techniques to Non-Linear Control Optimization, proc. of the *Multibody Dynamics 2007*, Milano, Italy, June 25–28, 2007.
- Lot, Massaro. The Kick-Back of Motorcycles: Experimental and Numerical Analysis, proc. of the *Multibody Dynamics 2007*, Milano, Italy, June 25–28, 2007.
- Cossalter, Lot, Massaro. The influence of Frame Compliance and Rider Mobility on the Scooter Stability, *Vehicle System Dynamics*, 45, 315-326, 2007.
- Lot, Massaro. A combined model of tire and road surface for the dynamics analysis of motorcycle handling, proc. of the *FISITA World Automotive Congress*, Yokohama, Japan, 22-27 October 2006.
- Cossalter, Lot, Massaro. The Significance of Frame Compliance and Rider Mobility on the Motorcycle Stability, proc. of the *Multibody Dynamics 2005*, Madrid, Spain, 21-24 June 2005.

Abstract

The work discusses the development of a state-of-art multi-body motorcycle model with 12 dof (position and orientation of the frame, steer angle, suspensions travels, wheels rotations, engine rotation), the implemented control model and the issues related to the modeling of structural flexibilities with lumped stiffness. The model includes 5 types of suspensions (telescopic fork, telelever, duolever, swing arm, paralever) all provided with lumped stiffness, 8 additional lumped stiffness for modeling the continuous compliance of the vehicle, the flexibility of the transmission system, a passive rider model for simulating the interaction of the driver with the handlebar and the frame and a 3D road-tire model which takes into account both the carcass geometry and compliance. A trim optimizer for generic motion condition (speed and accelerations) is also included.

Finally the model is used for the computation of the equivalent stiffness at the contact points, for the steering torque decomposition, for studying the effect of structural flexibilities on the weave and wobble stability, for the analysis of chatter, kick-back and rider's impedance on vehicle stability.

Sommario

Il lavoro discute i tratti salienti dello sviluppo di un modello multi-body di motociclo allo stato dell'arte a 12 gdl (posizione e orientazione del telaio, angolo di sterzo, corsa delle sospensioni, rotazione delle ruote, rotazione del motore), il modello di controllo utilizzato, e le problematiche relative alla modellazione delle flessibilità strutturali con parametri concentrati. Il modello include 5 schemi sospensivi (forcella telescopica, telelever, duolever, forcellone oscillante, paralever) tutti dotati di flessibilità concentrate, 8 rigidità concentrate per la modellazione della flessibilità distribuita del veicolo, una flessibilità per la modellazione della cedevolezza del sistema di trasmissione, un modello di pilota passivo in grado di simulare l'interazione del conducente con il manubrio e con il telaio, un modello di interazione pneumatico-strada 3D che tiene in considerazione sia la geometria che la deformabilità della carcassa. Il modello include anche un ottimizzatore dell'assetto in condizioni di moto (velocità e accelerazione) generiche.

Infine il modello è utilizzato per il calcolo delle rigidità equivalenti del veicolo ai punti di contatto, per la decomposizione della coppia di sterzo, per lo studio dell'effetto delle flessibilità strutturali sulla stabilità dei modi di vibrare weave e wobble, per l'analisi dei fenomeni noti come chatter e kick-back e per l'analisi dell'effetto dell'impedenza del pilota sulla stabilità.

Introduzione

Oggetto della tesi è lo sviluppo di un modello multi-body allo stato dell'arte e completamente parametrico per l'analisi della dinamica dei motocicli, e il suo utilizzo per l'indagine di una serie di fenomeni tuttora controversi all'interno del mondo scientifico e non (chatter, kick-back, effetto delle flessibilità strutturali e dell'interazione pilota-manubrio sulla stabilità dei modi weave e wobble). Le pubblicazioni su chatter, kick-back ed effetto dell'interazione pilota-manubrio sono molto limitate. Sono state inoltre sviluppate due versioni semplificate di tale modello utilizzate in un simulatore di guida virtuale [1] e in fase di implementazione in un codice di controllo ottimo [2]. Questi due modelli verranno solo accennati, in quanto le metodologie e i principi utilizzati per il loro sviluppo sono gli stessi del modello più dettagliato. Il codice è provvisto di due anelli di controllo della dinamica longitudinale e laterale che verranno discussi [3],[4], e di un ottimizzatore dell'assetto del veicolo [5].

Una sezione a parte è dedicata alle strategie di modellazione delle flessibilità strutturali del veicolo, e in particolare viene discussa la relazione tra asse di deformazione statico e dinamico mediante l'utilizzo di modelli matematici semplificati e delle recenti applicazioni della *Screw Theory* [6],[7]. La rappresentazione della flessibilità distribuita del motociclo mediante parametri concentrati è tuttora dichiarata oggetto di ricerca [8],[9].

Il punto di partenza della ricerca è il codice multi-body *FastBike* sviluppato e validato dal MDRG negli anni precedenti [10],[11] e i risultati della tesi [12] poi riassunti ed estesi in [13],[14]. *FastBike* è un codice basato su un modello parametrico di motociclo a 11 gradi di libertà (gdl), che consente essenzialmente due tipi di simulazioni: nel dominio del tempo (frenata, entrata in curva, slalom, cambio di corsia, ecc.) e nel dominio della frequenza (analisi di stabilità, FRF, analisi di comfort, ecc.). Il modello del pneumatico [15] consente di lavorare ad elevati angoli di rollio (50-60°) e tiene in considerazione sia la flessibilità della carcassa che il profilo del pneumatico (la cui importanza è nota [16],[17]).

Per quanto riguarda lo stato dell'arte della modellazione della motocicletta, l'evidenza degli ormai noti modi di vibrare wobble, weave e capsise è del 1971 [18]. Una revisione della bibliografia successiva si trova in [19],[20],[21]. Da sottolineare che molti autori non considerano nè la flessibilità del telaio, nè la mobilità del conducente. Sono da evidenziare [22],[23],[24],[25],[26],[14] per quanto riguarda le flessibilità del telaio, [27],[28] per quanto riguarda la mobilità (passiva) del pilota e [29] per l'effetto del passeggero. Molto interessante [30] per quanto riguarda la relazione tra la posizione dell'asse di torsione e la rigidità di torsione effettiva (al punto di contatto ruota-terreno) del veicolo. In [31] infine si analizza

l'effetto sulla stabilità di un sistema sospensivo per il topcase. La letteratura evidenzia come sia essenziale per una corretta modellazione qualitativa della stabilità del motociclo considerare almeno una flessibilità concentrata sull'avantreno e una per il rollio del pilota: è ancora oggetto di dibattito invece il numero delle flessibilità concentrate, la loro posizione, e i test necessari per una loro corretta identificazione. Da notare inoltre che tutti i lavori citati riguardano sostanzialmente la stabilità open-loop (il pilota non ha le mani sul manubrio). [32] costituisce un primo studio sulla possibile eccitazione di weave e wobble in curva grazie alla presenza di sotto/super-armoniche e armoniche-combinate nella risposta del motociclo alla forzante esterna (strada), e costituisce di fatto un'evoluzione di [33] che limitava l'analisi al campo lineare. In [8] per la prima volta viene considerata la stabilità closed-loop con un modello di interazione tra avambracci del conducente e manubrio alla luce delle recenti pubblicazioni sulla dinamica neuromuscolare del corpo umano [34] ottenute su un simulatore di guida per autoveicoli: la funzione di trasferimento tra rotazione e coppia al volante può essere approssimata con una funzione di trasferimento del secondo ordine, $f_n=0.88-3.82$ Hz (posizione rilassata e contratta rispettivamente), $\zeta=0.62-0.37$. Va sottolineato però che i parametri sono stati identificati su un simulatore di guida per autoveicoli (mediante eccitazione al volante) e non per motoveicoli (mediante eccitazione al manubrio e con postura differente). Ulteriori pubblicazioni sulle caratteristiche neuromuscolari del sistema pilota-volante [35],[36]) hanno inoltre recentemente ritoccato (f_n in posizione rilassata maggiori e accuratezza del modello limitata a 5.8 Hz) i parametri identificati in [34]. Infine in [37] e [38] si discute la possibile implementazione di un compensatore al posto del convenzionale ammortizzatore di sterzo e della stabilità del veicolo su strade non perfettamente orizzontali. Il modello più recente e avanzato a conoscenza dell'autore è [39] (l'ultima pubblicazione in cui è stato utilizzato è [38]): il modello ha 7 corpi (ruote, massa non sospesa anteriore e posteriore, telaio (inclusa la parte inferiore del corpo del pilota), manubrio, parte superiore del corpo del pilota (75% della massa del pilota)); il busto del pilota ha una frequenza di rollio disaccoppiata di 1.27 Hz e un rapporto di smorzamento $\zeta=0.49$; l'interazione tra manubrio e braccia del pilota è considerata in accordo con [8]; è presente una flessibilità concentrata tra avantreno e telaio; la risposta a regime del pneumatico è calcolata utilizzando la Magic Formula e l'accoppiamento tra le forze è calcolato utilizzando le *loss* (o *weighting*) functions, [40]; non sono presenti momenti lungo l'asse X_{SAE} del pneumatico in quanto viene considerata la migrazione del punto di contatto sulla carcassa al variare del rollio (anche i momenti secondo Z_{SAE} dovuti alla forza longitudinale sono quindi inclusi automaticamente); la risposta dinamica del pneumatico è governata dalle equazioni di

rilassamento che dipendono sia dalla rigidità di deriva (che varia con il carico) che dalla velocità di avanzamento.

Per quanto riguarda invece lo stato dell'arte della modellazione del pneumatico, si farà riferimento a [40], che analizza criticamente i lavori più significativi degli ultimi anni. Infine il controllo: la bibliografia a riguardo è limitata ([41] per una revisione) se confrontata con quella degli autoveicoli [42], e il problema non si può dire ancora risolto in modo soddisfacente. “La” soluzione dal punto di vista teorico si ottiene utilizzando la teoria del controllo ottimo, ma ragioni computazionali limitano la sua applicazione a modelli semplici di motociclo [43],[44]. Da segnalare [45] in cui l'ingresso del sistema per il controllo della dinamica laterale è l'angolo di sterzo invece della consueta coppia di sterzo: i risultati sembrano molto buoni ma non ci sono informazioni riguardo la coppia massima utilizzata e la banda del controllore.

Nel primo capitolo verranno discusse le novità apportate al codice *FastBike*: il nuovo modello di interazione pneumatico strada [46] che consente di effettuare simulazioni su strade dal profilo 3D generico; un modello di trasmissione flessibile che consente di evidenziare il fenomeno del chatter [47]; i nuovi schemi sospensivi (tutti dotati di flessibilità) paralever, telelever, duolever in aggiunta ai classici forcella e forcellone; l'introduzione delle flessibilità strutturali concentrate; il modello di pilota *sospeso* sul telaio *appeso* al manubrio; l'introduzione di corpi vibranti per consentire lo studio dell'effetto delle borse laterali sulla stabilità del veicolo; lo sviluppo di un algoritmo di controllo che consente all'utente di simulare le classiche manovre utilizzate per valutare l'handling (slalom, lane-change, cornering) e una sua estensione ai casi con velocità variabile e manovre generiche tuttora in fase di sviluppo; un algoritmo per il calcolo automatico dell'indice DAE del sistema di equazioni e l'individuazione delle equazioni di vincolo; un modulo di ottimizzazione dell'assetto del veicolo in condizioni di velocità e accelerazione qualsiasi. Il capitolo secondo presenterà delle simulazioni numeriche allo scopo di analizzare i fenomeni noti come chatter e kick-back [48], di valutare l'effetto delle flessibilità strutturali sulla stabilità del veicolo, di calcolare le rigidità equivalenti del veicolo e le componenti che formano la coppia di sterzo percepita dal pilota. Infine il terzo capitolo discuterà le problematiche relative alla modellazione delle flessibilità strutturali.

Capitolo 1: modellazione

La generazione delle equazioni del modello matematico del veicolo è stata ottenuta utilizzando MBSymba, un libreria Maple per la modellazione simbolica di sistemi multi-body sviluppata dal MDRG (www.dinamoto.it). MBSymba è essenzialmente un linguaggio ad oggetti per sistemi multi-body e contiene procedure per la definizione di terne, punti, vettori, forze, vincoli, corpi, etc. e ulteriori procedure per la derivazione delle equazioni del moto. Il codice è stato ulteriormente sviluppato dall'autore e dal Prof. Lot (Università di Padova) rispetto alla sua versione originale [49], per consentire ad esempio la scrittura automatica delle equazioni del moto utilizzando le quasi coordinate [50],[51],[40]. Sono poi state aggiunte nuove forme di vincoli, che sono state utilizzate per la definizione dei modelli dei diversi schemi sospensivi, §1.7.

1.1 Modello del veicolo per la dinamica

Per la modellazione del veicolo si utilizzano sostanzialmente tre tipi di terne: la terna di riferimento assoluto, la terna mobile, le terne di corpo. L'utente deve definire almeno un corpo per ognuna delle 7 terne principali di corpo (Figura 1):

- terna *CHASSIS* (o *T2*): attaccata alla parte posteriore del telaio;
- terna *CHASSIS_HEAD* (o *T7*): attaccata alla parte anteriore del telaio e collegata alla terna chassis mediante un giunto rigido o flessibile;
- terna *REAR_WHEEL* (o *T1*): attaccata alla ruota posteriore;
- terna *FRONT_WHEEL* (o *T4*): attaccata alla ruota anteriore;
- terna *HANDLEBAR* (o *T3*): attaccata al manubrio;
- terna *FRONT_UNSPRUNG* (o *T6*): attaccata alla parte non sospesa anteriore (per esempio la pinza freno anteriore);
- terna *REAR_UNSPRUNG* (o *T5*): attaccata alla parte non sospesa posteriore (per esempio la pinza freno posteriore).

Tutti i corpi attaccati alla terna *i*-esima vengono visti dal modello come un unico corpo avente le caratteristiche di inerzia risultanti dall'unione dei corpi. Alla fine dunque il modello utilizza solo 7 corpi, a prescindere dal numero effettivo di corpi definiti dall'utente.

La velocità della terna mobile è definita dalle variabili

$$v0 = [\Omega_0, VS0, VN0]$$

che rappresentano rispettivamente la velocità angolare di imbardata assoluta e le velocità lineari assolute (espresse in terna mobile).

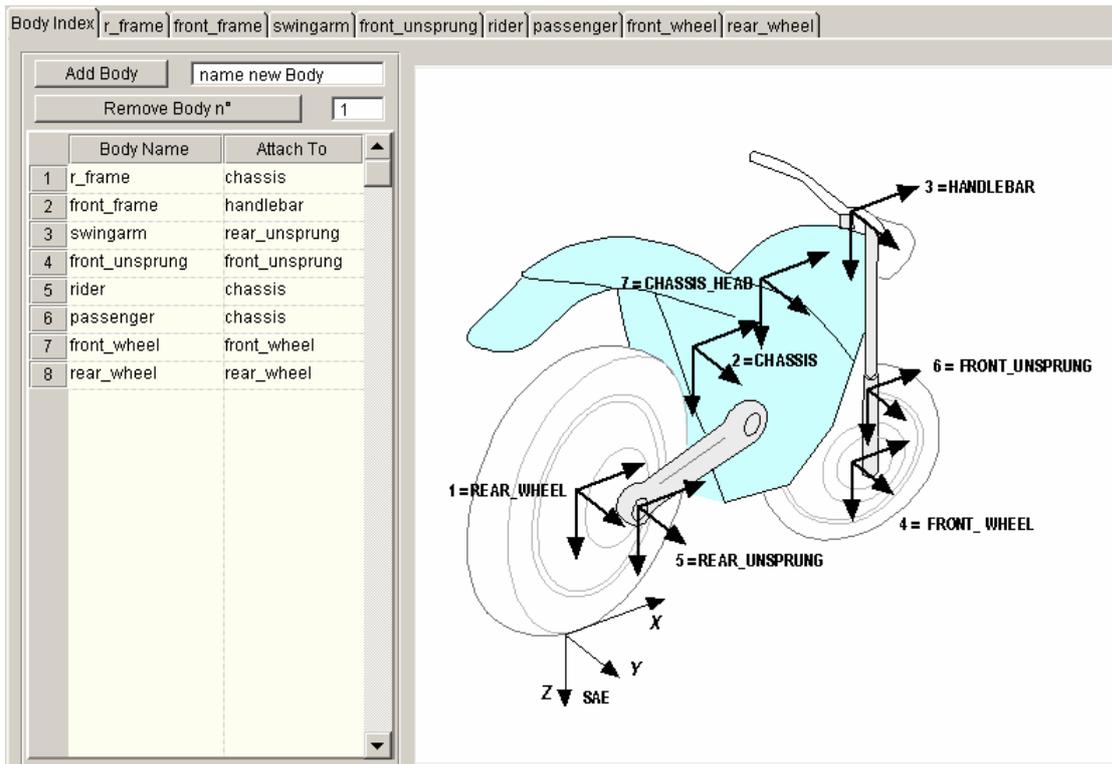


Figura 1 - Terne di corpo

Le variabili che definiscono la i-esima terna di corpo sono

$$p_i = [x_p, y_p, z_p, \psi_p, \phi_p, \mu_i]$$

e rappresentano la posizione del centro della terna (x,y,z) in terna mobile e l'orientazione della terna di rispetto alla mobile (la sequenza delle rotazioni è imbardata ψ , rollio ϕ , beccheggio μ come consuetudine nella dinamica dei veicoli terrestri). Per la scrittura della quantità di moto e del momento della quantità di moto si preferisce utilizzare le variabili

$$v_i = [VG_{i,x}, VG_{i,y}, VG_{i,z}, \omega_{i,x}, \omega_{i,y}, \omega_{i,z}]$$

che rappresentano le velocità lineari assolute del baricentro dei corpi attaccati alla terna i-esima espresse in terna mobile, e le velocità angolari assolute della terna i-esima espresse nella terna i-esima. In questo modo nelle equazioni del moto saranno presenti le variabili

$$v0, v0', p, v, v'$$

Sussistono poi 6 relazioni cinematiche differenziali tra le variabili p e v , e dunque per ognuno dei 7 corpi del modello saranno necessarie 12 equazioni (6 equazioni del moto e 6 equazioni cinematiche). Le equazioni del moto sono ottenute con approccio newtoniano e sono proiettate in terna mobile (equilibrio alla traslazione) e in terna di corpo (equilibrio alla rotazione), il polo dei momenti è il baricentro dei singoli corpi.

Per quanto riguarda i vincoli, oltre ai quelli convenzionali (distanze tra punti, assi di scorrimento, etc.) ce ne sono tre di particolari, che “attaccano” il veicolo alla terna mobile. Si è scelto di posizionare l’origine della terna $T3$ (*HANDLEBAR*) sopra l’origine della terna mobile, e di imporre che l’imbardata della terna $T7$ sia pari a quella della terna mobile, cioè:

$$\psi_7 = 0, x_3 = 0, y_3 = 0$$

Da notare che queste tre equazioni sono di fatto associate alle tre variabili $v0$.

Vale la pena osservare che sono state ottenute le equazioni del moto senza utilizzare la posizione assoluta della terna mobile (ma solo la sua velocità, lineare e angolare): la dinamica del veicolo è infatti invariante per traslazioni e rotazioni nel piano del terreno (assumendo un terreno piatto e di caratteristiche costanti). Poiché ai fini pratici è necessario conoscere la posizione del veicolo (se non altro per sapere quanta strada ha percorso dall’inizio della simulazione), vengono aggiunte tre nuove equazioni differenziali che permettono di ottenere la posizione assoluta $p0=(x0,y0,\psi0)$ della terna mobile, e dunque del veicolo:

$$x0' = \cos(\psi0) VS0 - VN0 \sin(\psi0)$$

$$y0' = VS0 \sin(\psi0) + \cos(\psi0) VN0$$

$$\psi0' = \Omega_z$$

A questo punto possono essere fatte alcune osservazioni. Le variabili $VS0$ e $VN0$ vengono anche dette quasi-coordinate, per il fatto che non consentono di ottenere per semplice integrazione la traiettoria percorsa, se non utilizzando anche l’informazione di qualche altra variabile (in questo caso l’imbardata $\psi0$). Le variabili posizione della terna mobile ($p0$) vengono dette ignorabili (o cicliche o inattive, [50]), in quanto non sono necessarie per la soluzione della dinamica. Anche le variabili rotazione delle ruote sono ignorabili, in quanto nelle equazioni del moto appaiono solo le loro derivate. Questa proprietà tuttavia, vale solo fino a quando le ruote sono perfettamente simmetriche e bilanciate (sia staticamente che dinamicamente). Come è intuitivo dedurre infatti, la posizione angolare della ruota è ininfluenza ai fini della dinamica, a meno che non ci sia una forzante funzione della posizione angolare (come nel caso dello sbilanciamento). Per quanto riguarda la modellazione del pneumatico, si rimanda alla §1.4.

E’ stato sviluppato anche un modello semplificato di motociclo, attualmente utilizzato nel simulatore di guida del MDRG e nel codice della manovra ottima. In particolare i corpi considerati sono limitati alla ruota posteriore, il telaio, l’avantreno, la ruota anteriore e la parte superiore del corpo del pilota. Viene utilizzata l’ipotesi di piccoli spostamenti per la rotazione del manubrio, il beccheggio del veicolo, la corsa delle sospensioni, la rotazione e il beccheggio del pilota rispetto al telaio. E’ inoltre presente un modello di frizione basato sul parallelo di un modello di attrito dinamico ed uno di attrito secco (modello di Dahl).

1.2 Modello del veicolo per la cinetostatica

Per il calcolo dell'assetto del veicolo, assegnata la velocità di avanzamento, l'accelerazione laterale (o la velocità di imbardata) e longitudinale, il rapporto di frenatura e il rapporto di freno-motore, si procede alla risoluzione delle equazioni del modello imponendo tutte le derivate pari a zero. In questo modo il sistema DAE diventa un sistema non-lineare di equazioni algebriche. Gli ingressi del sistema dinamico (coppia di sterzo, coppia motrice, coppia frenante posteriore, coppia frenante anteriore) diventano incognite del sistema: il numero di equazioni è dunque inferiore al numero delle variabili. In realtà gli ingressi coppia motrice e coppie frenanti possono essere conglobati in un'unica variabile $longS$ (spinta longitudinale convenzionale), che poi verrà distribuita sugli ingressi veri e propri in funzione del rapporto di frenatura e del tipo di moto (trazione o frenata). In particolare nel caso della trazione

$$ETW = -longS rr, MFR = 0, MFF = 0$$

mentre nel caso della frenata

$$ETW = -longS rf KS KE, MFR = -longS rf KS (1 - KE), MFF = -longS rf (1 - KS)$$

dove ETW è la coppia motrice, rr il raggio di rotolamento posteriore, MFR la coppia frenante posteriore, MFF la coppia frenante anteriore, rf il raggio di rotolamento anteriore, KS e KE sono

$$KS = \frac{MFR + ETW}{MFR + ETW + MFF}, KE = \frac{ETW}{MFR + ETW}$$

KS è detto rapporto di frenatura (coppia alla ruota posteriore / coppia totale alle ruote), KE è il rapporto di freno-motore (coppia di freno-motore / coppia totale alla ruota posteriore).

Ci sono dunque due sole nuove variabili (coppia di sterzo e $longS$) rispetto al caso dinamico: vengono aggiunte due nuove equazioni, che impongono il moto del sistema:

$$\Omega_z = yawrate, VSO = speed$$

dove $yawrate$ e $speed$ sono assegnate dall'utente.

Va sottolineato che il calcolo delle soluzioni con accelerazione longitudinale diversa da zero, cioè in accelerazione e frenata, non rappresenta una condizione di equilibrio vera e propria, in quanto non tutte le derivate della variabili di stato sono nulle (il veicolo sta variando la sua velocità). Il problema è stato aggirato calcolando la soluzione cinetostatica come se il veicolo avesse accelerazione longitudinale nulla, ma aggiungendo alle forze esterne di ciascun corpo le forze e le coppie di inerzia corrispondenti all'accelerazione imposta.

1.3 Modello per il calcolo delle rigidità equivalenti

Un veicolo è costituito da una serie di corpi (ruota posteriore, forcellone, telaio, avantreno, forcella, ruota anteriore) non infinitamente rigidi, le cui flessibilità si combinano e danno un

effetto equivalente alle ruote [11]. Le rigidità equivalenti possono essere ottenute misurando gli spostamenti delle ruote in seguito all'applicazione di forze sul punto di contatto pneumatico-terreno. I tipi di vincolo utilizzati sono essenzialmente due: incastro tra motore e riferimento assoluto, incastro tra testa di sterzo e riferimento assoluto.

A livello di modellazione si è cercato di rimanere il più vicino possibile alla procedura sperimentale, in modo da poter confrontare facilmente i risultati, e poter quindi verificare che la rigidità equivalente del modello sia prossima a quella sperimentale. In particolare si è deciso di fissare a telaio la terna $T7$ ($CHASSIS_HEAD$) in prossimità delle piastre dello sterzo.

Si procede come segue. Le tre variabili velocità della terna mobile vengono fissate a zero: in questo modo la terna mobile diventa terna assoluta e il numero di variabili diventa inferiore (di 3) rispetto al numero delle equazioni.

$$\Omega_z = 0, VS0 = 0, VN0 = 0$$

Vengono aggiunte tre nuove variabili: un momento di imbardata esterno $MZ7$ agente sulla terna (o meglio sul corpo attaccato alla terna) $CHASSIS_HEAD$ ($T7$ o terna 7), una forza longitudinale $FX7$ e una forza laterale $FY7$ esterne agenti sulla terna $T7$. Il numero di variabili è nuovamente pari a quello di equazioni.

$$MZ7, FX7, FY7$$

Vengono aggiunti due vincoli che impongono che l'angolo di sterzo δ e l'angolo di rollio ϕ siano nulli, e vengono eliminati i due vincoli che fissavano la velocità di avanzamento e la velocità angolare nella cinetostatica: in questo modo il numero totale di equazioni non cambia.

$$\delta = 0, \phi = 0$$

Viene eliminata la variabile spinta longitudinale $longS$ (introdotta con la cinetostatica) e viene sostituita con un momento di rollio esterno agente sul corpo 7.

$$MX7$$

Vengono aggiunti due nuovi vincoli che impongono che la posizione verticale $z7$ e il beccheggio $\mu7$ della terna 7 siano gli stessi della cinetostatica in condizioni nominali.

$$\mu7 - \mu7_{ssa} = 0, z7 - z7_{ssa} = 0$$

Vengono aggiunte due nuove variabili: un momento esterno di beccheggio $MY7$ e una forza esterna verticale $FZ7$ agenti sulla terna 7. A questo punto il numero di equazioni è uguale al numero di variabili, il corpo 7 è incastrato al riferimento assoluto, e l'angolo di sterzo è bloccato.

$$MY7, FZ7$$

Viene assegnata la forza laterale sul pneumatico anteriore e posteriore, vengono fissate a zero le forze longitudinali e i momenti dei pneumatici. Per evitare che le variabili velocità angolare delle

ruote rimangono indeterminate (non c'è più l'equazione che lega la forza allo slittamento del pneumatico, quindi alla velocità angolare delle ruote), le equazioni di equilibrio alla rotazione attorno all'asse delle ruote vengono sostituite dalle seguenti:

$$\omega_{1Y} = 0, \omega_{4Y} = 0$$

con ω_{1Y} e ω_{4Y} velocità angolare della ruota posteriore e anteriore rispettivamente. Viene infine calcolata la cinetostatica e le rigidezze equivalenti. La Tabella 1 evidenzia le differenze tra la formulazione cinetostatica classica e la formulazione utilizzata per il calcolo delle rigidezze equivalenti.

Tabella 1 – Cinetostatica classica vs. cinetostatica per il calcolo delle rigidezze equivalenti

cinetostatica classica		cinetostatica per il calcolo delle rigidezze	
variabili	equazioni associate	equazioni associate	variabili
Ω_z	$\psi = 0$	$\psi = 0$	MZ
VS	$x = 0$	$x = 0$	FX
VN	$y = 0$	$y = 0$	FY
τ	$\Omega_z = \text{yawrate}$	$\delta = 0$	τ
$longS$	$VS = \text{speed}$	$\phi = 0$	MX
		$z - z_{ssa} = 0$	FZ
		$\mu - \mu_{ssa} = 0$	MY
Fy_{tire}	$Fy_{tire} = Fy(\lambda, \phi, \kappa, N)$	$Fy_{tire} = Fy_{ext}$	Fy_{tire}
Fx_{tire}	$Fx_{tire} = Fx(\lambda, \phi, \kappa, N)$	$Fx_{tire} = 0$	Fx_{tire}
ω_{1Y}, ω_{4Y}	$\sum M_i = 0$	$\omega_{1Y} = 0, \omega_{4Y} = 0$	ω_{1Y}, ω_{4Y}

Lo spostamento e la rotazione della ruota dovuti alla deformazione, portano all'individuazione di un asse di deformazione, la cui inclinazione dipende dal rapporto tra la rigidezza equivalente di imbardata e quella di rollio, e la cui distanza dal punto di contatto dipende dalla rigidezza laterale equivalente.

Vale la pena osservare che in seguito alla deformazione indotta dal carico laterale, i carichi verticali sulle ruote variano leggermente, in dipendenza dell'inclinazione dell'asse di deformazione.

Sia

$$ax + bz + c = 0$$

l'equazione dell'asse di deformazione (dove $x=0$, $z=0$ individua la posizione del punto di contatto tra la ruota e il terreno). Si ottiene

$$a = \sin(\psi), b = -\cos(\psi) \sin(\phi), c = y$$

dove y , ψ , ϕ rappresentano al solito lo spostamento laterale del punto di contatto, l'imbardata e il rollio della ruota. Come è noto l'inclinazione α è pari a

$$-\arctan\left(\frac{a}{b}\right) = \arctan\left(\frac{\sin(\psi)}{\cos(\psi) \sin(\phi)}\right)$$

Dunque nel caso di pura deformazione di rollio ($\psi=0$) l'asse sarà perfettamente orizzontale ($\alpha=0$), mentre nel caso di pura deformazione di imbardata ($\phi=0$) l'asse sarà perfettamente verticale ($\alpha=90^\circ$). Per avere angoli positivi in accordo con la convenzione SAE, è necessario cambiare il segno nella formula di α .

La distanza dell'asse di deformazione dal punto di contatto dipende dalla deformazione laterale y , come si evince dalla nota formula

$$d = \frac{a x0 + b z0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

dove al numeratore c 'è c , che dipende dalla deformazione laterale, mentre $x0$ e $z0$ sono le coordinate del punto di contatto, che sono nulle in quanto l'origine della terna è proprio il punto di contatto.

Note le deformazioni e le forza laterale applicata è possibile calcolare le rigidzze (forza/deformazione lineare o angolare, momento/deformazione lineare o angolare) del sistema viste dal punto di contatto ruota-strada. Da notare che non solo la forza laterale contribuisce alla deformazione della struttura, ma anche la forza normale agente sulla ruota che ha un braccio non nullo quando la struttura è deformata. Il contributo di quest'ultima può facilmente arrivare al 5% del totale. Infine anche la forza peso ha un braccio non nullo quando la struttura è deformata (anche assumendo una struttura perfettamente simmetrica), ma l'effetto è solitamente trascurabile nel calcolo della rigidezza. Qualche attenzione va comunque posta quando la massa del telaio è particolarmente elevata ed è localizzata principalmente sullo *CHASSIS*, cioè il rapporto tra la massa dello *CHASSIS_HEAD* e dello *CHASSIS* è piccolo.

1.4 Modello di interazione pneumatico-strada 3D

Il modello di interazione pneumatico strada sviluppato rappresenta un'evoluzione di [15] al caso di profili stradali 3D generici, e non più solamente orizzontali (2D). Il modello consente quindi di simulare la dinamica in salita, in discesa, in curve paraboliche, in dossi, etc. Verranno

di seguito riassunti i tratti salienti del modello, per ulteriori dettagli si veda [46]. Nel resto del paragrafo si farà spesso riferimento a [40].

Il modello ricade nella famiglia dei modelli a singolo punto di contatto (il centro dell'impronta a terra) ed è esteso con l'introduzione di momenti di imbardata e di rotolamento alla modellazione dell'effetto dell'impronta. Si ritiene che questo genere di modelli sia realistico (le funzioni di trasferimento approssimano bene quelle sperimentali) per lunghezze d'onda λ maggiori di $24a$, dove a è metà lunghezza di contatto. Assumendo ad esempio una lunghezza di contatto pari a 0.150 m ([52]), $a=0.075$ m, $\lambda=1.8$ m, la frequenza spaziale limite massima sarà $\omega_s=2\pi/\lambda=3.5$ rad/m, ma anche $\omega_s=2\pi/\lambda=2\pi f/V$, con V velocità di avanzamento. E' evidente che a velocità nulla la frequenza spaziale è infinita. Assumendo $f_{\max}=3$ Hz si ottiene che il modello è realistico per velocità maggiori di $V_{\min}=2\pi f/\omega_s=5.4$ m/s.

La trattazione analitica conduce all'ottenimento di relazioni differenziali che legano le forze e i momenti di contatto agli scorrimenti e al rollio del pneumatico. La semplificazione di queste relazioni, porta all'ottenimento delle note equazioni di rilassamento, che consentono di modellare il comportamento del pneumatico al limite con due sole equazioni di rilassamento (longitudinale e laterale): si ottengono così i modelli a singolo punto di contatto. Un metodo alternativo per considerare il ritardo del pneumatico consiste nell'utilizzare le relazioni di equilibrio tra la forza di contatto dovuta agli slittamenti, e la forza dovuta alla deformazione della carcassa, in luogo delle equazioni di rilassamento. E' stato dimostrato che i due approcci sono sostanzialmente equivalenti.

1.4.1 Modellazione del ritardo del pneumatico

Nel modello originale MDRG, vengono introdotte tre nuove variabili

$$\zeta_L, \zeta_R, \xi$$

che rappresentano la deformazione laterale, radiale e tangenziale della carcassa del pneumatico, a cui vengono associate tre equazioni di equilibrio:

$$F_x(\xi, \xi') = F_x(\lambda_p, \phi, \kappa_i)$$

$$F_y(\zeta_L, \zeta_L', \zeta_R, \zeta_R') = F_y(\lambda_p, \phi, \kappa_i)$$

$$N(\zeta_L, \zeta_L', \zeta_R, \zeta_R') = N$$

Gli slittamenti laterali e longitudinali utilizzati includono i termini dovuti alla deformazione della carcassa, vengono detti istantanei e differiscono da quelli pratici (calcolati senza la deformazione

della carcassa). Le equazioni di equilibrio nascondono di fatto le equazioni di rilassamento, in particolare:

$$\begin{cases} \frac{\sigma_x}{V_x} \dot{F}_x + F_x = F_{x0} \\ \sigma_x = K_\xi / K_x \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\sigma_y}{V_x} \dot{F}_y + F_y = F_{y0} + \frac{\sigma_y}{V_x} N \dot{\phi} \\ \sigma_y = K_\lambda / K_y \end{cases}$$

dove $K_\xi, K_\lambda, K_x, K_y, F_{x0}, F_{y0}$ sono rispettivamente la rigidità di slip longitudinale, laterale, la rigidità strutturale longitudinale, laterale, la forza longitudinale e laterale a regime. L'equazione differenziale per la forza laterale differisce dalla classica equazione di rilassamento per via del termine nella derivata dell'angolo di rollio, responsabile di un certo ritardo nella risposta delle forze di rollio.

Sono inoltre presenti un momento di imbardata, dipendente dalla deriva istantanea e dal rollio, e un momento di rotolamento.

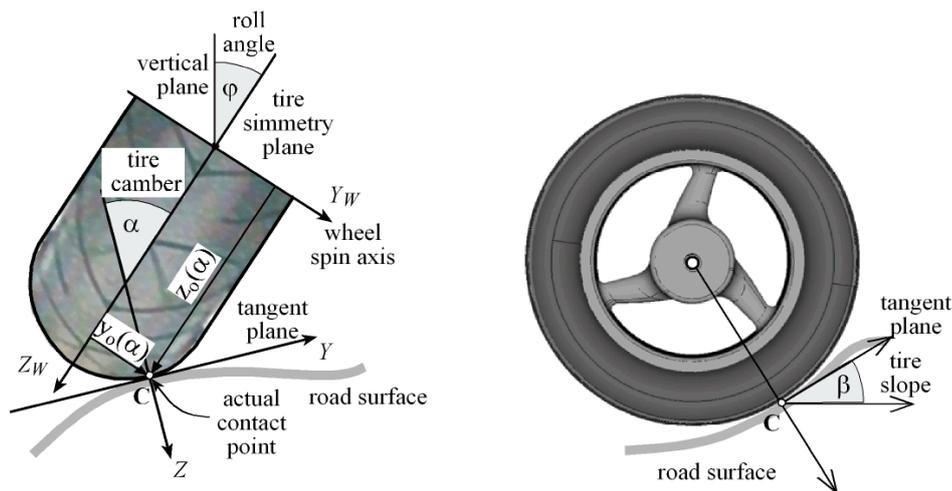


Figura 2 - Angolo di camber e angolo di slope

Il modello così definito consente solo simulazioni su terreni perfettamente piatti. Per poter estendere il modello alla trattazione di terreni generici vengono aggiunte due nuove variabili

$$\alpha, \beta$$

che rappresentano l'angolo di camber e l'angolo di slope del pneumatico (Figura 2), e due nuove equazioni, derivanti dal prodotto vettoriale tra la normale alla superficie della carcassa del pneumatico e la normale al profilo della strada

$$\vec{n}_{tire} \wedge \vec{n}_{road} = \vec{0}$$

che impongono che la normale alla carcassa del pneumatico sia parallela alla normale alla superficie stradale nel punto di contatto. E' noto che solo due delle tre componenti del prodotto vettoriale sono indipendenti [53].

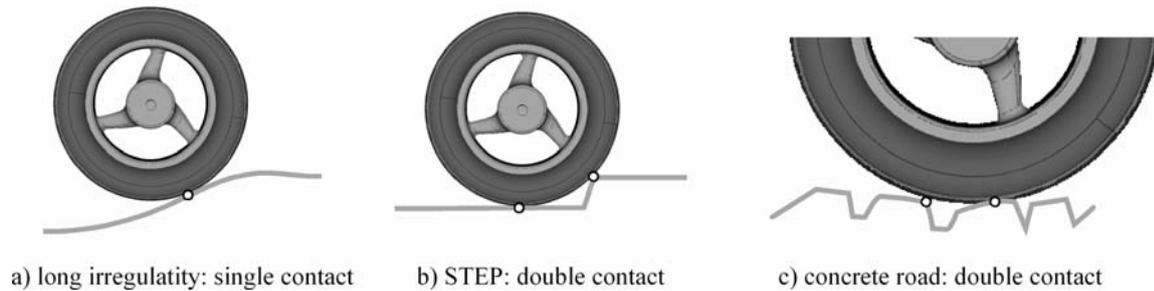


Figura 3 - Modello del contatto tra il pneumatico e la strada

E' opportuno sottolineare che il modello è a singolo punto di contatto e che quindi non è in grado di simulare profili stradali con componenti spettrali ad alta frequenza spaziale, cioè con lunghezza d'onda inferiore a 2-3 volte la lunghezza dell'impronta a terra, dove non è più possibile assumere che il contatto avvenga in un solo punto (Figura 3). E' tuttavia possibile continuare ad utilizzare un modello a singolo punto di contatto a patto di considerare un filtro geometrico del profilo stradale (non ancora implementato nel modello attuale): il pneumatico percorrerà dunque non il profilo stradale reale, ma un *profilo efficace* o equivalente, dotato di *altezza efficace* e *pendenza efficace*. In letteratura sono presenti essenzialmente tre tecniche per derivare e utilizzare questo profilo efficace, di seguito brevemente descritte.

The basic functions technique. La sperimentazione evidenzia che la risposta della forza normale e longitudinale al passaggio del pneumatico su un ostacolo (rettangolare, trapezoidale, gradino positivo, gradino negativo) può essere decomposta in funzioni base (approssimabili con metà funzione seno, $0..π$). Per la derivazione del profilo equivalente è sufficiente, al limite, un solo test del pneumatico sull'ostacolo, in quanto delle scalature permettono di modificare il profilo equivalente e di renderlo dipendente dal carico del pneumatico.

The two-point follower technique. Il test del pneumatico su un gradino permette di calcolare una curva base (approssimabile con un quarto di funzione seno, $0..π/2$), che poi sarà sufficiente per determinare la risposta del pneumatico su profili qualsiasi. L'inseguitore a 2 punti, muovendosi lungo la funzione base, determina l'altezza e la pendenza efficace del profilo equivalente. La tecnica si dimostra efficace solo per simulare il passaggio su un singolo ostacolo.

The tandem egg (or cam) technique. E' considerata la migliore tecnica per simulare profili qualsiasi e ostacoli multipli. Essenzialmente l'altezza e il profilo efficace sono determinate dalla congiungente i punti inferiori di due ellissi rigide che procedono ad una distanza dipendente dal carico normale sul pneumatico. Le dimensioni delle ellissi, che dipendono dal pneumatico e non dal tipo di ostacolo nè dal carico normale, possono essere determinate dalla risposta del pneumatico ad alcuni ostacoli di differente altezza, e a diversi carichi normali. Nel caso poi la

strada presenti anche un'inclinazione trasversale, sono necessarie (almeno) 4 ellissi, 2 a 2 parallele, ad una distanza pari a circa l'80% della larghezza dell'impronta a terra.

L'attraversamento di ostacoli a bassa lunghezza d'onda ed alta velocità può portare all'eccitazione dei modi della carcassa del pneumatico, che può eventualmente essere modellata (solitamente sono sufficienti i primi 6 modi, che si possono ottenere aggiungendo 6 gdl alla carcassa, considerata come un corpo rigido di inerzia opportuna).

1.4.2 Modellazione della strada

Un modo efficace di descrivere un profilo stradale è quello di fornire la curvatura Θ della strada (o il suo reciproco, il raggio di curvatura) in funzione della tratto percorso s (l'ascissa curvilinea). Le coordinate (x_R, y_R) del centro strada, e l'orientazione θ della stessa sono poi ottenuti integrando le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}\theta' &= \Theta \\ x_R' &= \cos(\theta) \\ y_R' &= \sin(\theta)\end{aligned}$$

Da notare che nelle precedenti relazioni la derivata è fatta rispetto ad s e non rispetto al tempo. Le equazioni vengono riportate nel dominio del tempo e aggiunte al sistema differenziale del veicolo, ricordando che

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t}$$

La coordinata curvilinea n permette poi di individuare la posizione di un punto generico che non si trova sul centro strada, Figura 4.

Per quanto riguarda l'altezza della strada, essa viene definita in funzione delle coordinate curvilinee s e n , $z=z(s,n)$. In particolare le caratteristiche della strada vengono definite in un numero limitato di punti e poi raccordate con un polinomio del 5° ordine che assicura la

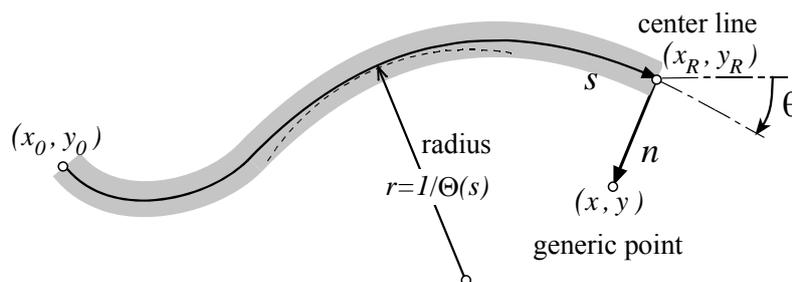


Figura 4 - Definizione della strada

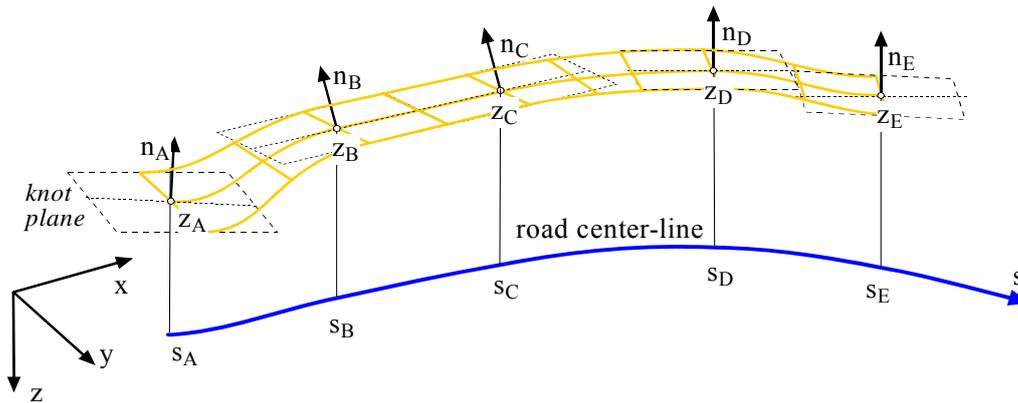


Figura 5 - Descrizione parametrica della strada

continuità fino alla derivata seconda, Figura 5.

Nel modello semplificato sviluppato per il simulatore di guida MDRG sono presenti alcune semplificazioni rispetto al modello appena descritto. In particolare non viene utilizzata la variabile slope del pneumatico β , e il punto di contatto pneumatico-strada è sempre il punto più basso della superficie della carcassa, Figura 6 e solo la flessibilità verticale del pneumatico è considerata. Come conseguenza le forze sui pneumatici non cambiano direzione quando il veicolo percorre un tratto in salita o in discesa, cioè il veicolo non decelera/accelera in salita/discesa anche se la spinta longitudinale rimane uguale alla spinta che assicurava la velocità costante in piano. Per superare questo problema è stata aggiunta una accelerazione longitudinale fittizia dipendente dalla pendenza della strada β

$$-g \sin(\beta)$$

dove g è l'accelerazione di gravità e la pendenza della strada è

$$\beta = \arctan\left(\frac{Z_{road_R} - Z_{road_F}}{p}\right)$$

con Z_{road_R} e Z_{road_F} elevazioni del punto di contatto posteriore e anteriore e p passo del veicolo, Figura 6. La dinamica è descritta utilizzando una terna mobile la cui origine è $x0, y0, z0$ e giace sotto il baricentro del veicolo. La variabile $z0$ appare solo nelle equazioni di vincolo tra pneumatico e strada, mentre le sue derivate appaiono nelle equazioni del moto. La posizione verticale della terna mobile $z0$ dipende dal profilo stradale

$$z0 = Z_{road_R} - \tan(\beta) B$$

con B distanza dal punto di contatto posteriore al baricentro del veicolo, mentre la sua velocità e accelerazione dipendono dalle derivate del profilo stradale. Per semplicità si è assunto

$$\begin{aligned} Z' &= -\tan(\beta) u \\ Z'' &= -\tan(\beta) u' \end{aligned}$$

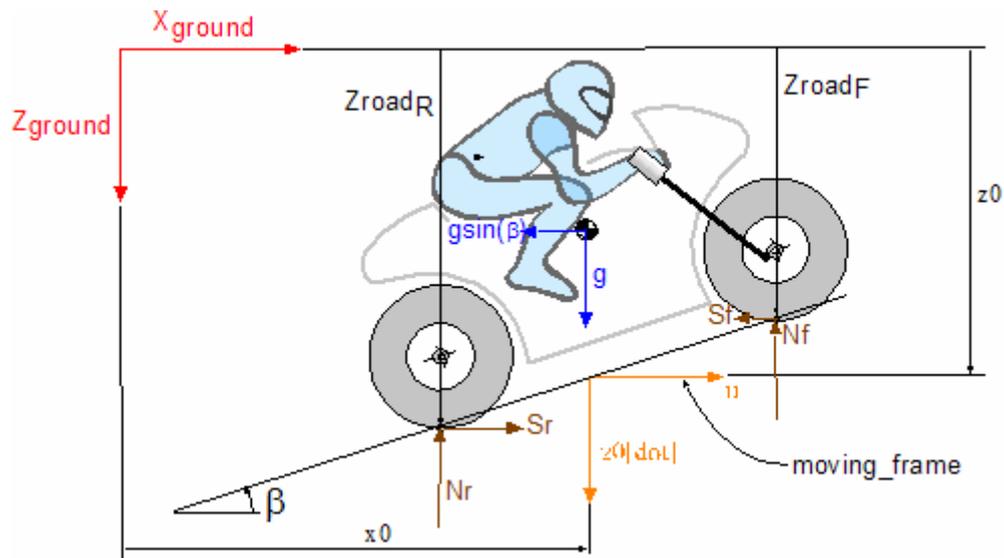


Figura 6 - Modello di strada utilizzato nel simulatore

con u velocità longitudinale della terna mobile espressa in terna mobile e trascurando la derivata della pendenza della strada β (di fatto è stato introdotto un filtro passa-basso). Infine la velocità di avanzamento del veicolo è

$$speed = \frac{u}{c(\beta)}$$

1.4.3 Modellazione delle forze a regime

A differenza della vecchia versione del codice, è ora possibile utilizzare la formulazione completa della *Magic Formula* per motocicli, sviluppata alla fine degli anni '90, [54]. La formulazione utilizzata differisce da quella riportata in [40] per il fatto che non viene utilizzata nè la *Overtuning Couple* nè la componente dipendente dalla forza longitudinale nell'*Aligning Torque*, in quanto questi contributi sono automaticamente tenuti in considerazione dalla migrazione del punto di contatto sulla carcassa del pneumatico.

Per quanto riguarda l'accoppiamento tra forze laterali e longitudinali sono stati implementati 2 approcci: il *Similarity Method* e il *Loss Functions Method*. Il *Similarity Method* consente di considerare l'accoppiamento delle forze con un approccio fisico derivante dai risultati dei modelli di pneumatico fisici tipo *Brush*. Al contrario il metodo delle *Loss Functions* è un approccio empirico, che consente potenzialmente di ottenere una migliore descrizione delle forze e momenti ma richiede il calcolo dei coefficienti delle *Loss Functions* mediante test sperimentali. Ulteriori dettagli sui metodi si trovano in [40].

1.5 Modello di trasmissione flessibile

E' stata dimostrata in [47] l'importanza della flessibilità del sistema di trasmissione nella generazione del fenomeno noto come *chatter*. Sebbene il sistema trasmissione possa essere sede di fenomeni complessi di non semplice modellazione (per esempio il creep), per lo studio della stabilità del veicolo si ritiene sufficiente un modello del tipo molla-smorzatore. L'introduzione di un nuovo grado di libertà (deformazione della trasmissione) comporta la comparsa di un nuovo modo di vibrare, che verrà chiamato modo della trasmissione.

La frequenza naturale di questo modo può variare molto con la tipologia del veicolo: da quasi 20 Hz per veicoli racing tipo 125cc a meno di 10 Hz per veicoli stradali di maggiore cilindrata (1000cc). Per esempio in [55] l'identificazione della funzione di trasferimento tra apertura farfalla e slip longitudinale della ruota posteriore consente di identificare le frequenze naturali dei modi di vibrare in-plane del veicolo e tra questi evidenzia la presenza di un modo di vibrare di trasmissione. La frequenza f_n del modo di vibrare può essere stimata come

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{J_{eq}}}$$

dove k è la rigidezza della trasmissione (principalmente dovuta al parastrappi) e J_{eq} è il momento di inerzia equivalente

$$J_{eq} = \frac{J_1 J_2}{J_1 + J_2}$$

con J_1 momento di inerzia assiale della ruota posteriore e J_2 momento di inerzia della trasmissione (motore, frizione, alberi del cambio, etc.) ridotto alla ruota posteriore.

In Figura 7 sono rappresentate le grandezze utilizzate nella modellazione. In particolare θ_1 è la rotazione assoluta del cerchione posteriore, Δ è la deformazione del sistema di trasmissione (il nuovo grado di libertà), *free_length* è la lunghezza del tratto libero della catena (dipende dalle variabili di stato del veicolo), β è la rotazione assoluta del pignone sullo chassis, r_c e r_p sono il

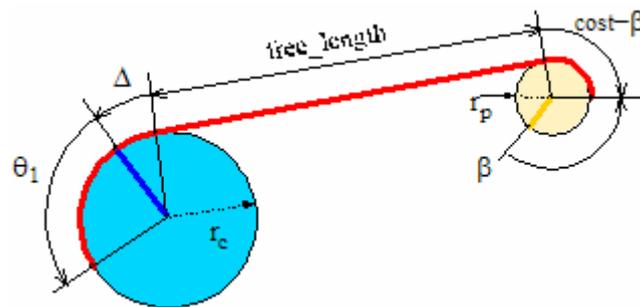


Figura 7 - Modellazione della flessibilità della trasmissione

raggio medio della ruota dentata sulla ruota posteriore e sul telaio rispettivamente. La lunghezza del tratto rosso in figura è costante e pari a

$$L0 = rc (\theta_1 + \Delta) + free_length + (cost - \beta) rp$$

mentre nel caso di trasmissione ad albero la formula si semplifica in

$$L0 = rc (\theta_1 + \Delta) + (cost - \beta) rp$$

da cui si ottiene, assumendo $L0 = cost \cdot rp$

trasmissione a catena	trasmissione ad albero
$\Delta = -\theta_1 - \frac{free_length}{rc} + \frac{rp \beta}{rc}$	$\Delta = -\theta_1 + \frac{rp \beta}{rc}$

Per comodità viene ridefinita la rotazione del pignone β come

$$\beta = \frac{rc (\theta_1 + \alpha)}{rp} \quad (2)$$

dove α dipende sia dalla variazione della lunghezza del tratto libero della catena (legata alla cinematica della sospensione posteriore), che dalla deformazione della trasmissione (dovuta al parastrappi). Ovviamente nel caso della trasmissione ad albero α dipende solo dalla deformazione del parastrappi. L'equazione associata al nuovo grado di libertà è l'equilibrio dell'inerzia della trasmissione:

$$IE_{rid} (\theta_1'' + \alpha'') = M_{eng} - M_{el} \quad (3)$$

dove IE_{rid} è l'inerzia della trasmissione ridotta alla ruota posteriore, θ_1 è la rotazione della ruota posteriore, M_{eng} è la coppia motrice ridotta alla ruota posteriore (che è un ingresso del sistema), M_{el} è la coppia del parastrappi

$$M_{el} = k \Delta + c \Delta'$$

dove k e c sono la rigidezza e lo smorzamento del parastrappi, e dove Δ è scritto in funzione di α . utilizzando (1) e (2). Alla fine dunque, la nuova variabile aggiunta al sistema è α (e la sua derivata α_{dot}), e la nuova equazione è l'equilibrio (3) (e la riduzione al primo ordine di α , $\alpha' = \alpha_{dot}$). Nel caso di trasmissione rigida, l'equazione di equilibrio viene sostituita da

trasmissione a catena	trasmissione ad albero
$0 = -\theta_1 - \frac{free_length}{rc} + \frac{rp \beta}{rc}$	$0 = -\theta_1 + \frac{rp \beta}{rc}$

nella quali al solito β è scritto in funzione di α grazie a (2).

Da notare infine che la catena è stata trattata come una cinghia, cioè sono state trascurate le fluttuazioni legate alla non-omocineticità tipica della trasmissione a catena.

Con il modello di trasmissione appena presentato non vengono considerati gli effetti giroscopici dovuti alla presenza del motore, che devono quindi essere aggiunti alle equazioni del moto. Le coppie giroscopiche sono applicate al corpo attaccato alla terna *CHASSIS* (*T2*), cioè si assume che il motore sia sulla terna *CHASSIS*. Ovviamente le coppie sono diverse se il motore è montato trasversalmente o longitudinalmente (in questo ultimo caso si assume che l'asse di rotazione del motore sia perfettamente orizzontale), e in particolare i termini aggiunti sono (Tabella 2)

Tabella 2 - Termini giroscopici aggiunti alle equazioni di equilibrio alla rotazione

equazione	motore trasversale	motore longitudinale
asse X_{T2}	$-IE_{gyro} (\omega_{2Y} - \mu_2' + \theta_1' + \alpha') \omega_{2Z}$	0
asse Y_{T2}	0	$IE_{gyro} (\omega_{2X} + \theta_1' \cos(\mu_2)) (\omega_{2Z} + \theta_1' \sin(\mu_2))$
asse Z_{T2}	$IE_{gyro} (\omega_{2Y} - \mu_2' + \theta_1' + \alpha') \omega_{2X}$	$-IE_{gyro} (\omega_{2X} + \theta_1' \cos(\mu_2)) \omega_{2Y}$

dove ω_{2Y} è la componente Y in terna *T2* della velocità angolare della terna *T2*, μ_2 è il beccheggio della terna *T2*, θ_1 e α come sopra, IE_{gyro} è l'inerzia del motore (e della frizione, etc.) ridotta alla ruota posteriore. Da sottolineare che l'inerzia ridotta alla ruota posteriore IE_{rid} che compare nell'equazione di equilibrio alla rotazione (3) è diversa dall'inerzia ridotta alla ruota posteriore che viene utilizzata per il calcolo dell'effetto giroscopico IE_{gyro} , e in particolare

$$IE_{rid} = IE_{eng} \tau^2$$

$$IE_{gyro} = IE_{eng} \tau$$

con IE_{eng} inerzia del motore all'albero a gomiti, τ rapporto di trasmissione tra l'albero a gomiti e la ruota posteriore. Inoltre mentre IE_{rid} è sempre positiva, IE_{gyro} può essere sia positiva che negativa: è positiva quando la rotazione del motore è concorde alla rotazione della ruota posteriore nel caso di motore trasversale e quando la rotazione del motore vista da dietro la moto è anti-oraria, è negativa negli altri casi.

1.6 Modello di pilota sospeso

Mentre i test di stabilità (identificazione dei modi weave e wobble) sono effettuati sia con le mani appoggiate sul manubrio sia senza ([56] ad esempio), le analisi numeriche sono solitamente effettuate senza considerare l'effetto dell'impedenza del conducente, con modelli che considerano solo il rollio [40] o il rollio e lo spostamento laterale [21] del busto del pilota

rispetto al telaio. E' ovvio che l'effetto delle mani è quello di chiudere un loop sul sistema motocicletta che cambierà sicuramente i poli del sistema, ma non è ben chiaro in che modo. E' anche vero che le caratteristiche di stabilità senza mani sono considerate una condizione necessaria. In passato [57] è stata aumentata l'inerzia dell'avantreno attorno all'asse dello sterzo per tenere in qualche modo in considerazione l'effetto del loop del pilota, ma è solo del 2004 [8] il primo lavoro che tiene conto dell'impedenza del pilota con un modello di interazione braccia-manubrio. Tale modello è molto simile a quello che è stato implementato nel codice *FastBike* e che verrà di seguito descritto. Tuttavia i parametri utilizzati sono molto diversi: in [8] si utilizzano i parametri di [34] (identificati in un simulatore per auto), mentre di seguito verranno utilizzati i parametri identificati nel simulatore di guida per motoveicoli del MDRG. I risultati dei due modelli sono alquanto differenti: per esempio i parametri di [8] prevedono un leggera stabilizzazione del modo weave ad alta velocità, mentre i parametri del MDRG prevedono una non trascurabile destabilizzazione del modo weave ad alta velocità, peraltro confermata dai test sperimentali a disposizione.

Il modello di pilota sospeso utilizza 3 gdl: lo spostamento laterale del corpo del pilota rispetto al telaio, il rollio della parte superiore del corpo del pilota rispetto alla parte inferiore, l'imbardata della parte superiore del corpo del pilota rispetto alla parte inferiore (che è allineata con il telaio). Si assume che l'asse di rollio tra pilota e telaio sia perfettamente orizzontale e che passi in prossimità del piano della sella (o dell'anca). Si assume anche che l'asse di imbardata tra pilota e telaio sia perfettamente verticale e che passi in prossimità del baricentro della parte superiore del corpo del conducente. Queste due ipotesi sono basate su un'interpretazione fisica del fenomeno vibratorio analizzato e sull'osservazione della vibrazione del pilota sul veicolo reale.

Più in dettaglio la parte inferiore del corpo pilota (dai piedi all'anca) è attaccata alla terna *LOWER_RIDER* (o *T8*) che può traslare lateralmente rispetto al telaio del veicolo. La parte superiore del corpo del pilota è attaccata alla terna *UPPER_RIDER* (o *T9*) che può rollare e imbardare rispetto alla terna *LOWER_RIDER*. Dei sistemi molla-smorzatore collegano la terna *LOWER_RIDER* al telaio (rigidezza k_y e coefficiente di smorzamento c_y), la terna *UPPER_RIDER* alla terna *LOWER_RIDER* (k_z, c_z per l'imbardata e k_x, c_x per il rollio) e la terna *UPPER_RIDER* alla terna *HANDLEBAR* (k_a, c_a per l'effetto delle braccia del pilota). Gli 8 parametri del modello vengono fissati in modo da avere le stesse caratteristiche modali del pilota reale.

Per il calcolo dei parametri delle molle e degli smorzamenti della dinamica laterale e di rollio sono stati utilizzati i risultati di [27] mentre per il calcolo dei parametri della dinamica di imbardata sono stati utilizzati i recenti risultati ottenuti sul simulatore del MDRG.

In particolare sono state identificate le rigidzze k_z e k_a , gli smorzamenti c_z e c_a , e le inerzie I_t e I_δ (con I_t inerzia di imbardata della parte superiore del busto coinvolta nella vibrazione e I_δ inerzia aggiunta al manubrio, Figura 8) mediante FRF tra 0.5 e 12 Hz di un campione di 10 piloti. L'ingresso è costituito dalla rotazione dello sterzo δ (ampiezza 2°), l'uscita dalla coppia applicata τ , l'identificazione è stata fatta sulla funzione ineranza δ''/τ , rapporto tra accelerazione angolare del manubrio e coppia di sterzo. Al solito per minimizzare il rumore l'ineranza viene calcolata come rapporto tra il cross-spettro dell'accelerazione e l'auto-spettro della coppia. E' possibile identificare un pilota "medio" (anche se il numero dei campioni testati è molto limitato), le cui caratteristiche sono $\omega_n=40.82 \text{ rad/s}=6.5 \text{ Hz}$ e $\zeta=0.45$, dove

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_t + k_a}{I_t}} \quad \zeta = \frac{1}{2} \frac{c_t + c_a}{\sqrt{(k_t + k_a) I_t}} \quad (4)$$

Va sottolineato che nei piloti identificati l'inerzia I_t è risultata alquanto minore dell'inerzia della parte superiore del corpo del conducente (circa 20%), a testimoniare che nella vibrazione viene coinvolta solo una parte del busto, e l'inerzia I_δ è molto piccola, a testimoniare che l'effetto dovuto alla massa delle mani sul manubrio non è l'effetto principale. Per ulteriori dettagli sull'identificazione si veda [58].

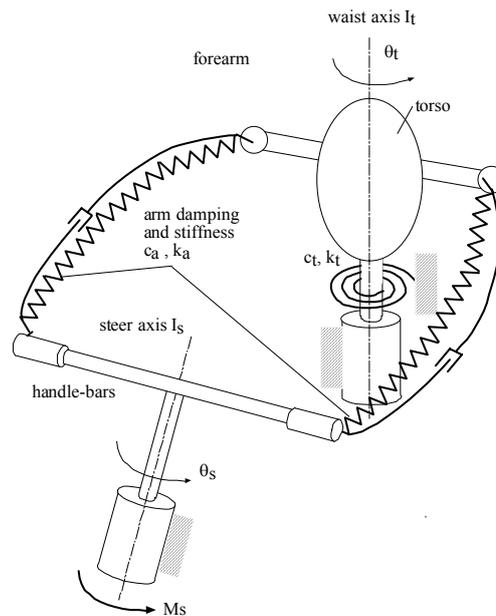


Figura 8 - Modello del pilota per lo studio dell'effetto dell'impedenza

Si possono fare alcune interessanti osservazioni confrontando l'effetto dell'ammortizzatore di sterzo e quello del pilota: entrambi trasmettono della coppia al telaio in funzione della rotazione del manubrio. Viene presentato qui di seguito il confronto tra le due funzioni di trasferimento. Per ottenere la funzione di trasferimento del pilota virtuale si scrive l'equazione di equilibrio secondo l'asse di imbardata:

$$I_t \theta_t'' + k_t \theta_t + c_t \theta_t' + k_a (\theta_t - \delta) + c_a (\theta_t' - \delta') = 0$$

dove θ_t è l'imbardata del busto del pilota rispetto al telaio e dove è stato assunto che l'asse di sterzo sia verticale, cioè parallelo all'asse di imbardata del pilota. Vengono inoltre trascurate le dinamiche laterali e di rollio. La funzione di trasferimento tra la rotazione dello sterzo e l'angolo di imbardata del pilota è

$$T(s) = \frac{k_a + c_a s}{I_t s^2 + (c_t + c_a) s + k_t + k_a}$$

La funzione ha uno zero dipendente solo da k_a e c_a (è infatti un sistema eccitato alla base) e due poli che dipendono da tutte le caratteristiche del sistema. La funzione di trasferimento tra la rotazione dello sterzo e la coppia trasmessa al telaio è invece

$$T(s) = \frac{(k_a + c_a s)(k_t + c_t s)}{I_t s^2 + (c_t + c_a) s + k_t + k_a}$$

poichè la coppia M_t tra telaio e busto del pilota è

$$M_t = k_t \theta_t + c_t \theta_t'$$

Infine sostituendo i parametri del pilota medio, si ottiene la funzione di trasferimento numerica

$$\frac{(1053.4 + 19.28 s)(75.8 + 4.79 s)}{0.6441 s^2 + 24.07 s + 1129.2}$$

che ha due zeri reali e due poli complessi coniugati. Il modulo della funzione di trasferimento (Figura 9) ha un valore 38 dB (71 Nm/rad) a 0 Hz, sale a 49 dB (284 Nm/rad) alla risonanza (6.5 Hz) e poi si stabilizza intorno a 43 dB (145 Nm/rad) ad alte frequenze. La fase parte da 0°, sale fino a +40° (~4 Hz) a causa dello zero a più bassa frequenza (2.5 Hz), poi scende intorno ai -10° (~10 Hz) e asintoticamente si riporta a 0°, come previsto visto che ci sono due zeri e due poli tutti stabili.

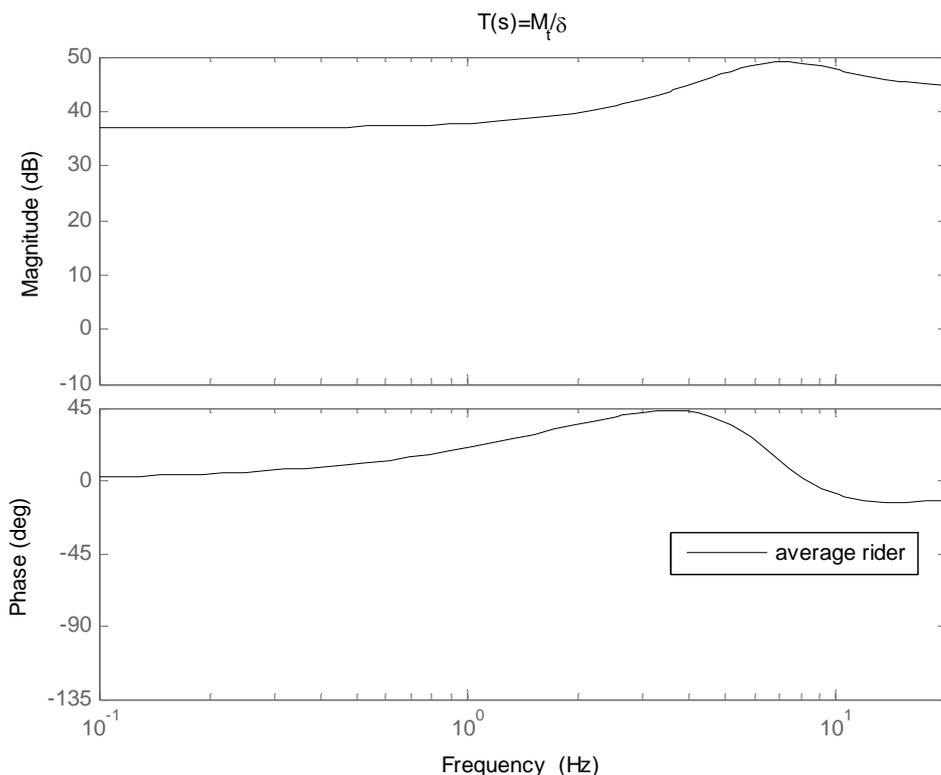


Figura 9 - Funzione di trasferimento tra angolo di sterzo e coppia al telaio, pilota medio

Per quanto riguarda l'ammortizzatore di sterzo, assumendo una relazione lineare tra coppia e velocità dello sterzo, la funzione di trasferimento è banalmente un derivatore, la cui pendenza dipende dal coefficiente di smorzamento

$$T(s) = c_d s$$

In Figura 10 è rappresentato il confronto tra le funzioni di trasferimento della coppia M_t trasmessa al telaio in funzione della velocità dell'angolo di sterzo δ_{dot} , per frequenze tra 0 e 20 Hz, nel caso del pilota medio e per 3 coefficienti di smorzamento dell'ammortizzatore di sterzo ($c_d= 0.5$ (effetto attriti), 4.0 (ammortizzatore medio), 7.5), che risultano in tre rette il cui valore costante è c_d . Da sottolineare che anche in assenza di ammortizzatore di sterzo la sola presenza degli attriti interni giustifica l'utilizzo di un valore del coefficiente di smorzamento non nullo (per esempio 0.5). La funzione di trasferimento M_t/δ_{dot} si ottiene dalla M_t/δ aggiungendo un polo a 0 Hz, cioè $M_t/\delta_{dot} = (M_t/\delta)/s$.

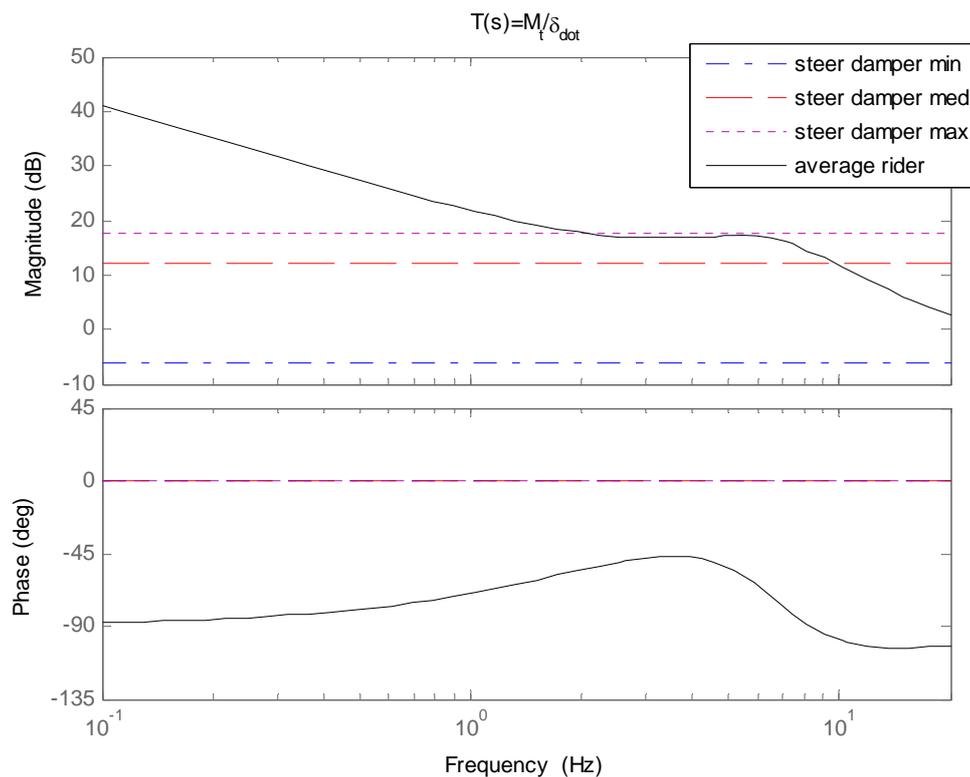


Figura 10 - Confronto tra la funzione di trasferimento del pilota medio e 3 ammortizzatori di sterzo

E' interessante osservare che il modulo della funzione di trasferimento del pilota è maggiore di quello di tutti gli ammortizzatori di sterzo considerati tra 0 e 2 Hz, mentre ricalca la curva dell'ammortizzatore di sterzo con il massimo coefficiente di smorzamento tra 2 e 6 Hz: l'effetto sulla stabilità del veicolo sarà dunque tutt'altro che trascurabile (§2.6). Per quanto riguarda la fase, l'ammortizzatore di sterzo è sempre a 0° (è un derivatore e stiamo analizzando M_t/δ_{dot}), mentre per il pilota virtuale valgono le considerazioni fatte in precedenza ma traslate di -90° poichè questa volta la funzione è tra δ_{dot} e M_t e non tra δ e M_t (-45° circa tra 2 e 6 Hz).

Infine il modello di pilota che è stato implementato sul simulatore del MDRG. Il busto del pilota può rollare e beccheggiare rispetto al telaio; attualmente solo il rollio del pilota è acquisito tramite un inclinometro attaccato alla schiena del pilota reale. L'ingresso nel modello matematico è il rollio relativo tra pilota e telaio, filtrato con un filtro passa-basso del secondo ordine i cui parametri possono essere scelti dall'utente. La velocità e l'accelerazione di rollio vengono derivate dal segnale in ingresso (angolo di rollio relativo) e vengono utilizzate nelle equazioni del moto di equilibrio del busto del pilota. L'incognita è la coppia tra busto del pilota e telaio, che viene calcolata note le caratteristiche inerziali del busto del pilota. Inoltre la coppia che il pilota applica sul manubrio viene acquisita e costituisce un altro ingresso del sistema. In particolare la coppia entra come azione sull'equazione di equilibrio del manubrio e come

reazione sul telaio. Va quindi osservato che nel simulatore MDRG la coppia applicata al manubrio viene trasmessa istantaneamente, uguale in modulo e contraria in verso, al telaio, mentre nel modello *FastBike* la coppia applicata al manubrio viene trasmessa al telaio modificata in modulo e sfasata come evidenziato dalla funzione di trasferimento riportata in Figura 10.

1.7 Modello degli schemi sospensivi e delle flessibilità concentrate

Il modulo delle sospensioni contiene le equazioni di vincolo (e le relative variabili) per 5 differenti schemi sospensivi: forcellone oscillante, quadrilatero posteriore (paralever), forcella telescopica, telelever, duolever. L'approccio modulare consente la semplice introduzione di ulteriori schemi sospensivi. Tutte le sospensioni sono dotate di flessibilità concentrate. L'ipotesi alla base di tutti gli schemi è che tutte le inerzie degli organi di collegamento siano trascurabili: in questo modo ogni sospensione vincola il movimento relativo delle terne principali del modello (terna della massa non sospesa posteriore *REAR_UNSPRUNG*, terna del telaio *CHASSIS*, terna del manubrio *HANDLEBAR*, terna della massa non sospesa anteriore *FRONT_UNSPRUNG*). Da notare che in generale ci sono tre assi di interesse per l'avantreno (che in generale non coincidono): l'asse del manubrio (asse Z della terna *T3*), l'asse della forcella (asse Z della terna *T6*) e l'asse dello sterzo (indicato di seguito nelle figure come *steering axis*).

1.7.1 Forcellone oscillante

Il vincolo è definito con 6 equazioni (e relative variabili) tra la terna *T5* (*REAR_UNSPRUNG*) e la terna *T2* (*CHASSIS*, parte posteriore del telaio), Figura 11.

Sia C_5 il perno del forcellone sul telaio definito in terna *T5* e sia C_2 lo stesso perno definito in terna *T2*. Sia DC_5 la posizione della flessibilità concentrata in terna *T5, β l'inclinazione degli assi principali di deformazione rispetto alla terna *T5*, e $T5\beta$ una terna che differisce da *T5* per una*

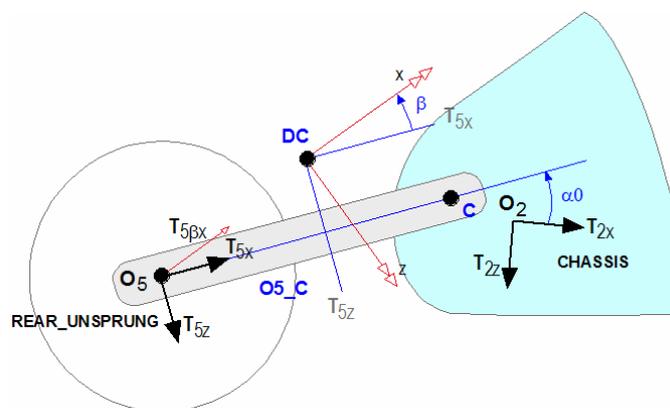


Figura 11 - Forcellone oscillante

rotazione β attorno all'asse y . Sia O_2 l'origine della terna 2, O_5 l'origine della terna 5, FS la forza della sospensione, ZS e VZS la corsa della sospensione e la sua derivata. Sia α_0 l'angolo tra l'asse X della terna T2 e l'asse della forcella in condizioni di tutto esteso. Le equazioni di vincolo sono riportate in Tabella 3.

Tabella 3 – Equazioni di vincolo, forcellone oscillante

no.	equazione	variabile	commento
ϕ_1	$\overrightarrow{C_2 C_5} \cdot \overrightarrow{T5_x} = 0$	FX_{T5}	la distanza tra C_2 e C_5 nel piano $\langle T5_x, T5_z \rangle$ è nulla.
ϕ_2	$\overrightarrow{C_2 C_5} \cdot \overrightarrow{T5_z} = 0$	FZ_{T5}	
ϕ_3	$\overrightarrow{O_2 DC_5} \cdot \overrightarrow{T2_y} = 0$	FY_{T5}	$\langle T5_{\beta_x}, T5_{\beta_z} \rangle$ è complanare con $\langle T2_x, T2_z \rangle$
ϕ_4	$\overrightarrow{T5_{\beta_x}} \cdot \overrightarrow{T2_y} = 0$	$MZ_{T5\beta}$	
ϕ_5	$\overrightarrow{T5_{\beta_z}} \cdot \overrightarrow{T2_y} = 0$	$MX_{T5\beta}$	
ϕ_6	$FS=FS(ZS, VZS)$	FS	forza della sospensione

Nel caso la rigidità non sia infinità, le equazioni ϕ_4 e ϕ_5 diventano ϕ_4^* e ϕ_5^* :

$$\phi_4^* = \phi_4 + CZ \cdot (DZ \cdot \dot{\phi}_4 - Mz) = 0$$

$$\phi_5^* = \phi_5 + CX \cdot (DX \cdot \dot{\phi}_5 - Mx) = 0$$

dove CZ, CX sono le cedevolezza del vincolo, DZ, DX gli smorzamenti. Nel caso rigido di fatto si impone che le rotazioni secondo gli assi principali di deformazione siano nulle.

1.7.2 Paralever

Il vincolo è definito con 6 equazioni (e relative variabili) tra la terna T5 (REAR_UNSPRUNG) e la terna T2 (CHASSIS), Figura 12.

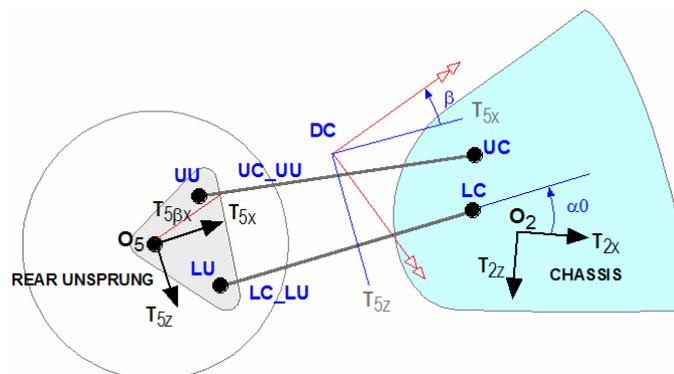


Figura 12 - Quadrilatero posteriore (paralever)

Siano UU e LU il perno superiore e inferiore della sospensione sulla massa non sospesa, definiti in terna $T5$, e siano UC e LC il perno superiore e inferiore della sospensione sulla parte posteriore del telaio, definiti in terna $T2$. Siano UC_UU e LC_UU le lunghezze dei bracci della sospensione. Sia DC_5 la posizione della flessibilità concentrata in terna $T5$, β l'inclinazione degli assi principali di deformazione rispetto alla terna $T5$, e $T5\beta$ una terna che differisce da $T5$ per una rotazione β attorno all'asse y . Sia O_2 l'origine della terna $T2$, O_5 l'origine della terna $T5$, FS la forza della sospensione (agisce tra il braccio inferiore della sospensione e il telaio), ZS e VZS la corsa della sospensione e la sua derivata. Sia α_0 l'angolo tra l'asse X della terna $T2$ e il braccio inferiore della sospensione in condizioni di tutto esteso. Le equazioni di vincolo sono riportate in Tabella 4.

Tabella 4 – Equazioni di vincolo, quadrilatero posteriore (paralever)

no.	equazione	variabile	commento
ϕ_1	$\overrightarrow{UUUC} \cdot \overrightarrow{UUUC} = UU_UC^2$	F_U	la lunghezza del braccio superiore è UU_UC.
ϕ_2	$\overrightarrow{LULC} \cdot \overrightarrow{LULC} = LU_LC^2$	F_L	la lunghezza del braccio inferiore è LU_LC
ϕ_3	$\overrightarrow{O_2DC_5} \cdot \overrightarrow{T2_y} = 0$	$F_{Y_{T5}}$	$\langle T5\beta_x, T5\beta_z \rangle$ è complanare con $\langle T2_x, T2_z \rangle$
ϕ_4	$\overrightarrow{T5\beta_x} \cdot \overrightarrow{T2_y} = 0$	$MZ_{T5\beta}$	
ϕ_5	$\overrightarrow{T5\beta_z} \cdot \overrightarrow{T2_y} = 0$	$MX_{T5\beta}$	
ϕ_6	$FS=FS(ZS, VZS)$	FS	forza della sospensione

Nel caso la rigidità non sia infinità, le equazioni ϕ_4 e ϕ_5 diventano ϕ_4^* e ϕ_5^* :

$$\phi_4^* = \phi_4 + CZ \cdot (DZ \cdot \dot{\phi}_4 - Mz) = 0$$

$$\phi_5^* = \phi_5 + CX \cdot (DX \cdot \dot{\phi}_5 - Mx) = 0$$

dove CZ, CX sono le cedevolezza del vincolo, DZ, DX gli smorzamenti. Nel caso rigido di fatto si impone che le rotazioni secondo gli assi principali di deformazione siano nulle.

1.7.3 Forcella telescopica

Il vincolo è definito con 6 equazioni (e relative variabili) tra la terna $T6$ ($FRONT_UNSPRUNG$) e la terna $T3$ ($HANDLEBAR$), Figura 13.

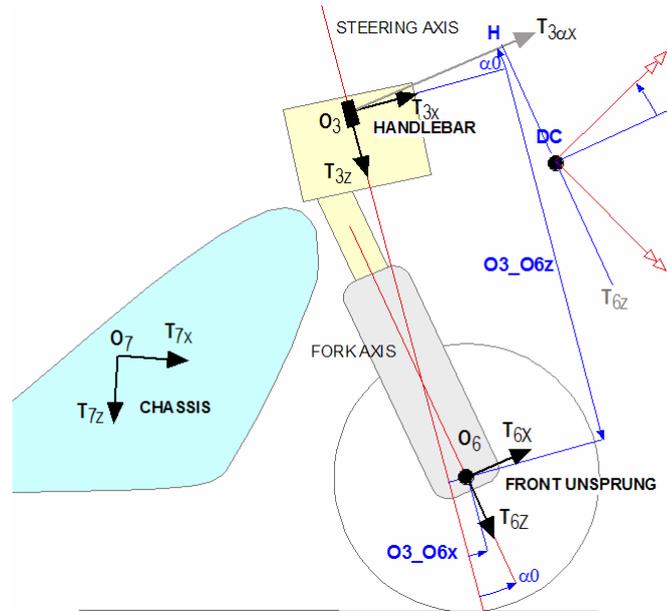


Figura 13 - Forcella telescopica

Siano $O3_O6x$ e $O3_O6z$ le posizioni del perno ruota O_6 nella terna $T3$ in condizioni di tutto esteso, DC_6 la posizione della flessibilità concentrata in terna $T6$ e H la proiezione di DC_5 in terna $T3\alpha$, dove $T3\alpha$ differisce da $T3$ per una rotazione α attorno all'asse $T3y$. Sia O_3 l'origine della terna $T3$ ($T3z$ è sull'asse dello sterzo), O_6 l'origine della terna $T6$ ($T6z$ è parallelo all'asse degli steli della forcella) e coincidente con il perno ruota, FS la forza della sospensione (tra $T6$ e $T3$), ZS e VZS la corsa della sospensione e la sua derivata, α_0 l'angolo tra l'asse dello sterzo e l'asse della forcella. Le equazioni di vincolo sono riportate in Tabella 5.

Tabella 5 – Equazioni di vincolo, forcella telescopica

no.	equazione	variabile	commento
ϕ_1	$\overrightarrow{HDC} \cdot \overrightarrow{T6_x} = 0$	FX_{T6}	giunto prismatico tra DC e H nel piano $\langle T6_x, T6_z \rangle$
ϕ_2	$\overrightarrow{T3\alpha_x} \cdot \overrightarrow{T6_z} = 0$	MY_{T6}	
ϕ_3	$\overrightarrow{O_3DC_6} \cdot \overrightarrow{T3_y} = 0$	FY_{T6}	$\langle T6\beta_x, T6\beta_z \rangle$ è complanare con $\langle T3_x, T3_z \rangle$
ϕ_4	$\overrightarrow{T6\beta_x} \cdot \overrightarrow{T3_y} = 0$	$MZ_{T6\beta}$	
ϕ_5	$\overrightarrow{T6\beta_z} \cdot \overrightarrow{T3_y} = 0$	$FY_{T6\beta}$	
ϕ_6	$FS=FS(ZS, VZS)$	FS	forza della sospensione

Nel caso la rigidità non sia infinità, le equazioni ϕ_4 e ϕ_5 diventano ϕ_4^* e ϕ_5^* :

$$\phi_4^* = \phi_4 + CZ \cdot (DZ \cdot \dot{\phi}_4 - Mz) = 0$$

$$\phi_5^* = \phi_5 + CX \cdot (DX \cdot \dot{\phi}_5 - Mx) = 0$$

dove CZ, CX sono le cedevolezza del vincolo, DZ, DX gli smorzamenti. Nel caso rigido di fatto si impone che le rotazioni secondo gli assi principali di deformazione siano nulle.

1.7.4 Telelever

Il vincolo è definito con 6 equazioni (e relative variabili) tra la terna T_6 ($FRONT_UNSPRUNG$), la terna T_3 ($HANDLEBAR$) e la terna T_7 ($CHASSIS_HEAD$, parte anteriore dello chassis), Figura 14.

Il sistema è costituito da una coppia rotoidale in O_3 tra telaio e manubrio, da due coppia sferiche in H (una per stelo) tra manubrio e steli della forcella, dalle due coppie prismatiche (una per stelo) degli steli, da una coppia sferica in U tra la massa non sospesa anteriore e il braccio oscillante, da una coppia rotoidale in C tra il braccio oscillante e il telaio. Il sistema spaziale ha dunque 2 gradi di libertà (sterzo e corsa della sospensione) come si ricava facilmente da

$$n = 6 \cdot (nb - 1) - 2 \cdot R - 1 \cdot S - 1 \cdot P - 1 \cdot SS$$

$$= 6 \cdot (5 - 1) - 2 \cdot 5 - 1 \cdot 3 - 1 \cdot 5 - 1 \cdot 4 = 2$$

dove $nb=5$ è il numero dei corpi (telaio, manubrio, steli, foderi, braccio oscillante), R sta per coppia rotoidale, S per coppia sferica, P per coppia prismatiche (cinematicamente le due coppie prismatiche sono equivalenti ad un'unica coppia prismatiche), SS per la doppia coppia sferica (cinematicamente equivalente ad un giunto di cardano).

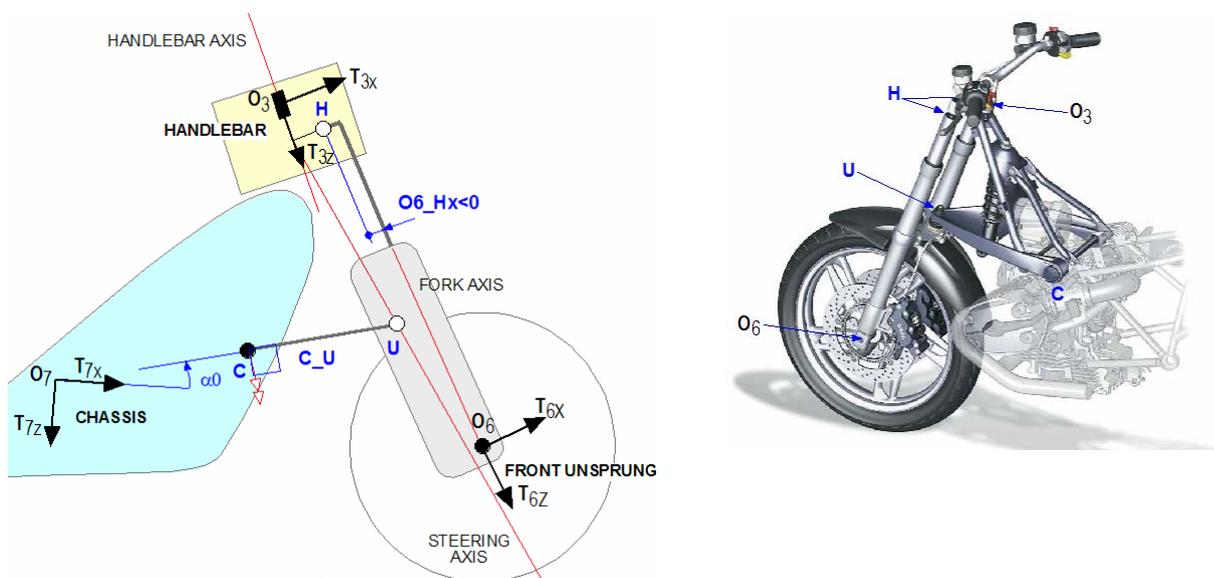


Figura 14 - Telelever

Sia $O6_Hx$ la distanza tra l'asse Z della terna $T6$ (parallelo all'asse degli steli, ma non necessariamente allineato con essi) e il punto H , in terna $T6$. Sia C_U la lunghezza del braccio oscillante. Sia α_0 l'angolo tra l'asse X della terna $T7$ e il braccio oscillante nella condizione di tutto esteso, FS la forza della sospensione (tra il braccio oscillante e $T7$), ZS e VZS la corsa della sospensione e la sua derivata. Le equazioni di vincolo sono riportate in Tabella 6.

Tabella 6 – Equazioni di vincolo, telelever

no.	equazione	variabile	commento
ϕ_1	$\overrightarrow{UC} \bullet \overrightarrow{UC} = C_U^2$	F_U	la lunghezza del braccio oscillante è C_U .
ϕ_2	$\overrightarrow{UC} \bullet \overrightarrow{T7}_y = 0$	MZ_U	\overrightarrow{UC} sta nel piano $\langle T7_x, T7_z \rangle$
ϕ_3	$\overrightarrow{O_6H} \bullet \overrightarrow{T6}_x = O6_Hx$	FX_{T6}	l'asse degli steli passa per H
ϕ_4	$\overrightarrow{O_6H} \bullet \overrightarrow{T6}_y = 0$	FY_{T6}	
ϕ_5	$\overrightarrow{T6}_x \bullet \overrightarrow{T3}_y = 0$	MZ_{T6}	nessuna rotazione attorno all'asse HU
ϕ_6	$FS=FS(ZS, VZS)$	FS	forza della sospensione

Nel caso la rigidità non sia infinità, l'equazione ϕ_2 diventa ϕ_2^* :

$$\phi_2^* = \phi_2 + C2 \cdot (D2 \cdot \dot{\phi}_2 - M2) = 0$$

dove $C2$, è la cedevolezza del vincolo, $D2$ lo smorzamento.

1.7.5 Duolever

Il vincolo è definito con 10 equazioni (e relative variabili) tra la terna $T6$ ($FRONT_UNSPRUNG$), la terna $T3$ ($HANDLEBAR$) e la terna $T7$ ($CHASSIS_HEAD$), Figura 15. Il sistema è costituito da una coppia rotoidale in O_3 tra telaio e manubrio, da una coppia rotoidale in RH , tra manubrio e la biella superiore $RHSJ$, una coppia sferica in SJ , tra biella superiore e inferiore, una coppia rotoidale in RU tra biella inferiore $SJRU$ e massa non sospesa anteriore, due coppie sferiche in UU e LU e due rotoidali in UC e LC che definiscono un quadrilatero $RSSR$ tra massa non sospesa anteriore e telaio.

Il sistema spaziale ha dunque 2 gradi di libertà (sterzo e corsa della sospensione) come si ricava facilmente da

$$\begin{aligned} n &= 6 \cdot (nb - 1) - 5 \cdot R - 3 \cdot S \\ &= 6 \cdot (7 - 1) - 5 \cdot 5 - 3 \cdot 3 = 2 \end{aligned}$$

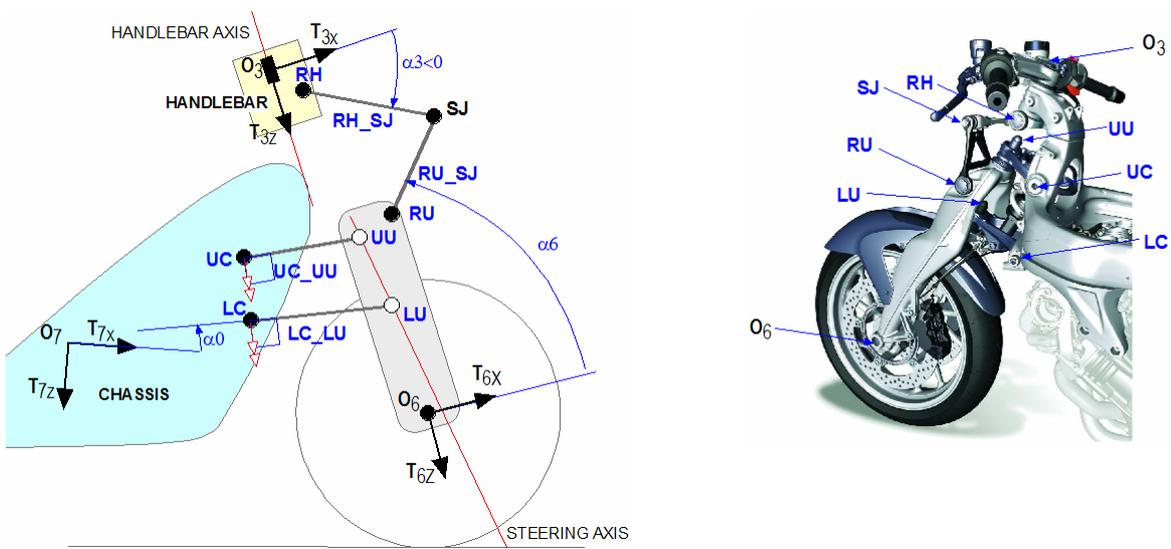


Figura 15 - Duolever

dove $nb=7$ è il numero dei corpi (telaio, manubrio, biella superiore, biella inferiore, massa non sospesa anteriore, braccio oscillante superiore, braccio oscillante inferiore), R sta per coppia rotoidale, S per coppia sferica.

Sia lunghezza RH_SJ la lunghezza della biella superiore, RU_SJ la lunghezza della biella inferiore, UC_UU e LC_LU la lunghezza del braccio oscillante superiore e inferiore del quadrilatero. Siano SJ_3 e SJ_6 la posizione di SJ in T_3 e T_6 rispettivamente, α_3 e α_6 gli angoli tra le bielle e le terne T_3 e T_6 . Sai T_0 la terna mobile e sia α_0 l'angolo tra l'asse X della terna T_7 e il braccio oscillante inferiore nella condizione di tutto esteso. Sia FS la forza della sospensione (tra il braccio oscillante inferiore del quadrilatero e T_7), ZS e VZS la corsa della sospensione e la sua derivata. Le equazioni di vincolo sono riportate in Tabella 7.

Tabella 7 – Equazioni di vincolo, duolever

no.	equazione	variabile	commento
ϕ_1	$\overline{UCUU} \bullet \overline{UCUU} = UC_UU^2$	F_U	la lunghezza del braccio superiore è UC_UU.
ϕ_2	$\overline{LC LU} \bullet \overline{LC LU} = LC_LU^2$	F_L	la lunghezza del braccio inferiore è LC_LU
ϕ_3	$\overline{UCUU} \bullet \overline{T7}_y = 0$	MZ_U	\overline{UCUU} sta nel piano $\langle T7_x, T7_z \rangle$
ϕ_4	$\overline{LC LU} \bullet \overline{T7}_y = 0$	MZ_L	$\overline{LC LU}$ sta nel piano $\langle T7_x, T7_z \rangle$
ϕ_5	$\overline{SJ_3 SJ_6} \bullet \overline{T0}_x = 0$	FX_{T0}	
ϕ_6	$\overline{SJ_3 SJ_6} \bullet \overline{T0}_y = 0$	FY_{T0}	

ϕ_7	$\overrightarrow{SJ_3 SJ_6} \bullet \overrightarrow{T0_z} = 0$	FZ _{T0}	
ϕ_8	$(\overrightarrow{RH SJ} \times \overrightarrow{F_{SJ}}) \bullet \overrightarrow{T3_y} = 0$	α_3	$\overrightarrow{F_{SJ}}$ non fa momento rispetto all'asse Y di T3
ϕ_9	$(\overrightarrow{RU SJ} \times \overrightarrow{F_{SJ}}) \bullet \overrightarrow{T6_y} = 0$	α_6	$\overrightarrow{F_{SJ}}$ non fa momento rispetto all'asse Y di T6
ϕ_{10}	FS=FS(ZS,VZS)	FS	forza della sospensione

Nel caso la rigidità non sia infinità, le equazioni ϕ_3 e ϕ_4 diventano ϕ_3^* e ϕ_4^* :

$$\phi_3^* = \phi_3 + C3 \cdot (D3 \cdot \dot{\phi}_3 - M3) = 0$$

$$\phi_4^* = \phi_4 + C4 \cdot (D4 \cdot \dot{\phi}_4 - M4) = 0$$

dove C3, C4 sono le cedevolezza del vincolo, D3, D4 gli smorzamenti. Nel caso rigido di fatto si impone che le rotazioni secondo gli assi principali di deformazione siano nulle.

1.7.6 Altre flessibilità concentrate

Oltre alle flessibilità delle sospensioni, il modello è provvisto di 8 ulteriori flessibilità concentrate, 2 (flessione e torsione) sul perno ruota posteriore tra la terna *REAR_WHEEL* e la terna *REAR_UNSPRUNG*, 3 (flessione, torsione e beccheggio) sul telaio tra la terna *CHASSIS* e la terna *CHASSIS_HEAD*, 1 (torsione) sulla testa dello sterzo tra la terna *CHASSIS_HEAD* e la terna *HANDLEBAR*, 2 (flessione e torsione) sul perno ruota anteriore tra la terna *FRONT_WHEEL* e la terna *FRONT_UNSPRUNG*, Figura 16.

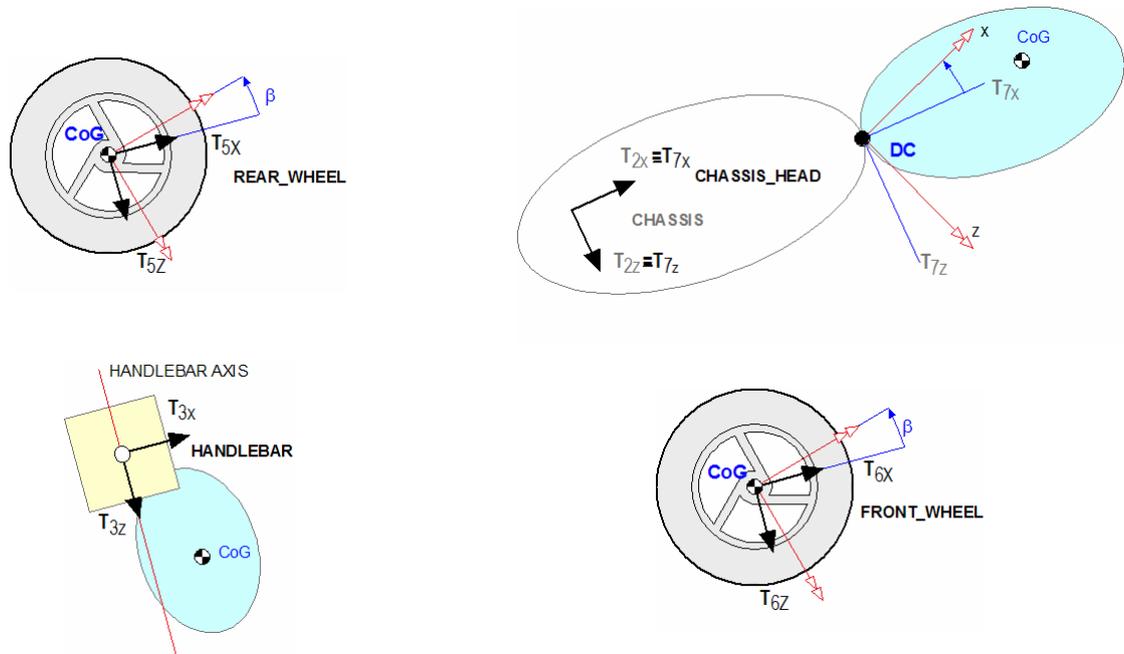


Figura 16 - Flessibilità concentrate nel modello

1.8 Modello dei corpi vibranti

E' possibile aggiungere al modello un numero qualsiasi di corpi sospesi, collegati ad una delle 7 terne principali del modello (alla fine della catena cinematica quindi) mediante un sistema molla-smorzatore. Si assume che le deformazioni dovute alla cedevolezza del vincolo siano piccole: in questo modo non ci sarà accoppiamento tra le variabili di deformazione nelle equazioni di equilibrio del corpo vibrante.

Più in dettaglio, un corpo $sosp_i$ sospeso ad uno dei 7 corpi principali $body_i$ (associato a T_i) è definito tramite una terna $TS=Ti \cdot TD$ la cui orientazione e origine coincide con quella di T_i quando tutte le deformazioni sono nulle. In particolare la terna di rototraslazione è

$$TD = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_z & \alpha_y & \alpha_z cp_y - \alpha_y cp_z + \Delta_x \\ \alpha_z & 1 & -\alpha_x & -\alpha_z cp_x + \alpha_x cp_z + \Delta_y \\ -\alpha_y & \alpha_x & 1 & \alpha_y cp_x - \alpha_x cp_y + \Delta_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dove $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ sono le deformazioni angolari, $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ sono le deformazioni lineari, cp_x, cp_y, cp_z la posizione del vincolo in terna T_i . TD è ottenuta tramite

- traslazione (cp_x, cp_y, cp_z)
- rotazione α_z (infinitesima) attorno all'asse Z
- rotazione α_x (infinitesima) attorno all'asse X

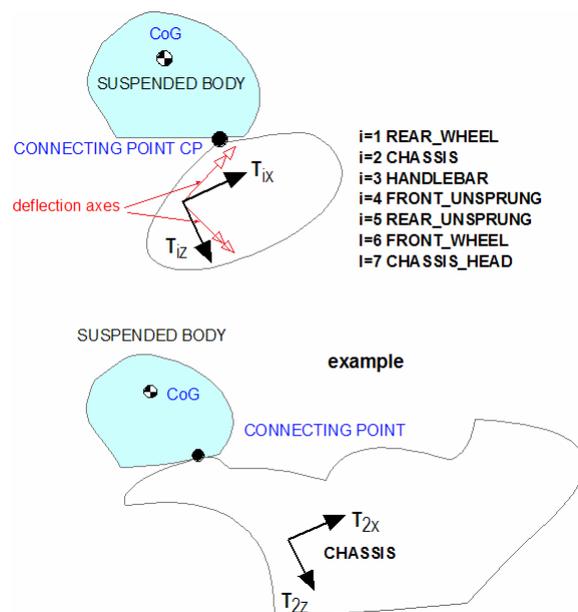


Figura 17 - Definizione di corpo sospeso

- rotazione α_Y (infinitesima) attorno all'asse Y
- traslazione $(-cp_x, -cp_y, -cp_z)$

Da notare che l'ordine delle rotazioni non è rilevante per via dell'ipotesi di piccoli spostamenti, e che $TD=Id(4)$ quando tutte le deformazioni sono nulle.

In seguito all'aggiunta di $sosp_i$, le equazioni del moto del corpo principale $body_i$ vengono modificate: le 3 equazioni di equilibrio alla traslazione del corpo $body_i$ diventano l'equilibrio alla traslazione di $body_i$ e $sosp_i$, mentre le 3 equazioni di equilibrio alla rotazione, diventano l'equilibrio alla rotazione di $body_i$ e $sosp_i$. E' evidente che in queste equazioni non compariranno le reazioni vincolari, in quanto interne, ma compariranno invece dei termini dovuti alle deformazioni. Vengono poi aggiunte le equazioni di equilibrio di $sosp_i$ alla traslazione e alla rotazione attorno al vincolo (in modo da avere il disaccoppiamento delle equazioni di rotazione rispetto alle reazioni vincolari, cioè l'equazione di equilibrio α_i avrà solo la reazione vincolare $M_{\alpha i}$). Infine le reazioni vincolari vengono calcolate dalle seguenti equazioni

$$\begin{bmatrix} (RV_X - dx \Delta'_X) cx - \Delta_X(t) \\ (RV_Y - dy \Delta'_Y) cy - \Delta_Y(t) \\ (RV_Z - dz \Delta'_Z) cz - \Delta_Z(t) \\ \left(RV_{\alpha_X} - drx \alpha'_X \right) crx - \alpha_X(t) \\ \left(RV_{\alpha_Y} - dry \alpha'_Y \right) cry - \alpha_Y(t) \\ \left(RV_{\alpha_Z} - drz \alpha'_Z \right) crz - \alpha_Z(t) \end{bmatrix} = 0 \rightarrow (cx=0, \dots, crz=0) \rightarrow \begin{bmatrix} \Delta_X(t) \\ \Delta_Y(t) \\ \Delta_Z(t) \\ \alpha_X(t) \\ \alpha_Y(t) \\ \alpha_Z(t) \end{bmatrix} = 0 \quad (5)$$

dove $RV_X, RV_Y, RV_Z, RV_{\alpha X}, RV_{\alpha Y}, RV_{\alpha Z}$ sono le reazioni vincolari, $cx, cy, cz, crx, cry, crz$ sono le cedevolezza del vincolo, $dx, dy, dz, drx, dry, drz$ sono gli smorzamenti del vincolo. Tale scrittura delle problema consente una ottimizzazione del numero di equazioni utilizzate, infatti nel caso si voglia considerare la cedevolezza in un unica direzione, ad esempio la rotazione attorno all'asse X del corpo $body_i$, sarà necessario aggiungere la sola equazione di equilibrio alla rotazione di $sosp_i$ nella direzione X, e la quarta equazione di (5), e ovviamente modificare tutte e 6 le equazioni di $body_i$. In generale dunque, per ogni deformazione è necessario aggiungere 1 equazione del moto (+ 1 equazione di riduzione al primo ordine) e 1 equazione elastica; le variabili corrispondenti sono 1 variabile di deformazione (+ la velocità di deformazione) e 1 forza/coppia di vincolo.

E' anche possibile imporre una deformazione secondo un asse distinto da quello della terna T_i . In tal caso sarà necessario aggiungere un numero di equazioni e variabili superiore al numero dei nuovi gradi di libertà. Supponiamo ad esempio che $sosp_i$ sia dotato di flessibilità alla rotazione secondo un asse qualsiasi nel piano $\langle X, Z \rangle$ (freccie rosse in Figura 17). In tal caso, nonostante ci sia un solo nuovo grado di libertà (1 sola cedevolezza), verranno aggiunte sia le equazioni relative ad α_x che ad α_z . Ci saranno due nuove variabili di deformazione, ma saranno tra loro dipendenti.

Per poter individuare facilmente le equazioni da considerare si utilizza la matrice di cedevolezza C in terna T_i . Siano $\beta_y, \beta_x, \beta_z$ le tre rotazioni che permettono di passare dalla terna delle direzioni principali di deformazione a T_i , e sia R la matrice di rotazione 3x3 associata. Siano inoltre cx, \dots, crz le 6 cedevolezza principali, associate alla matrice (diagonale) di cedevolezza in terna principale. La matrice di cedevolezza $C(\beta_y, \beta_x, \beta_z, cx, \dots, crz)$ in terna T_i sarà

$$C = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} cx & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & cz & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & crx & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & cry & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & crz \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix}$$

E' necessario includere l'equazione associata alla variabile i-esima tutte le volte che la riga i-esima di C è diversa da zero.

1.9 Modello del controllo

Il modello contiene un controllore PID sulla coppia di sterzo per il controllo della dinamica laterale e un PI sulla coppia motrice e sulle coppie frenanti per il controllo della dinamica longitudinale. L'architettura del sistema è riportata in Figura 18. Sono presenti due anelli separati per il controllo della velocità e della traiettoria. Va sottolineata la presenza di un filtro passa-basso (del secondo ordine) sulla coppia calcolata dal PID che ha lo scopo di tenere conto della limitata banda in frequenza del pilota (Figura 19) e la strategia look-ahead: se la manovra desiderata deve iniziare a $t=t_0$, il controllore comincia ad intervenire a $t=t_0-t_{LD}$, il controllore cioè "guarda in avanti" come il pilota reale. Matematicamente questo è dovuto al fatto che le funzioni di trasferimento tra la coppia di sterzo e le variabili di stato (angolo di rollio, posizione laterale, etc.) presentano un certo sfasamento alle frequenze utilizzate dal controllore.

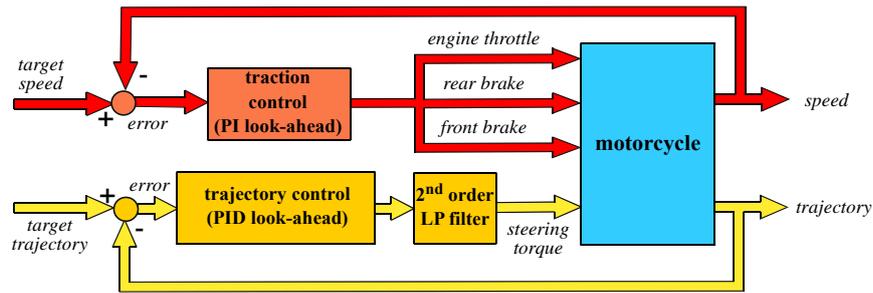


Figura 18 - Architettura del sistema di controllo

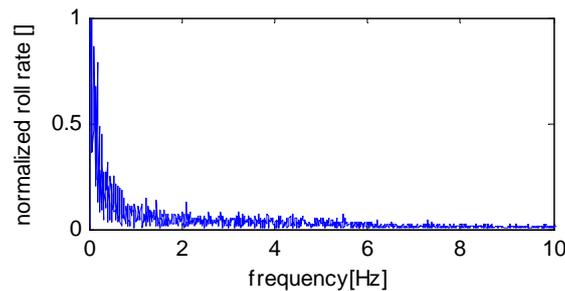


Figura 19 - FFT di una motocicletta MotoGP 2006, circuito del Qatar

Il controllo della velocità è piuttosto semplice e ha la seguente forma

$$S_{eq} = M_{eq} \left(K_P \frac{V_T(t + t_{LD}) - V(t)}{t_{LD}} + K_I \int (V - V_T) dt + k_D V^2 + S_0 \right)$$

dove M_{eq} è la massa equivalente (che include tutte le inerzie traslanti e rotanti), S_{eq} è la forza longitudinale equivalente (rapporto tra la potenza necessaria per accelerare il veicolo e la velocità di avanzamento), K_P e K_I sono le costanti del controllo proporzionale e integrale, V e V_T sono la velocità attuale e la velocità desiderata, k_D è il coefficiente di resistenza aerodinamico, t_{LD} è il “lead-time” del controllo (solitamente circa 0.1s), S_0 è la componente costante della resistenza di rotolamento. La forza equivalente S_{eq} viene poi convertita in coppia motrice, coppia di freno-motore, coppia frenante alla ruota anteriore e coppia frenante alla ruota posteriore in funzione del tipo di manovra (accelerazione/frenata) e delle specifiche dell’utente (rapporto di frenata anteriore/posteriore e rapporto di freno-motore).

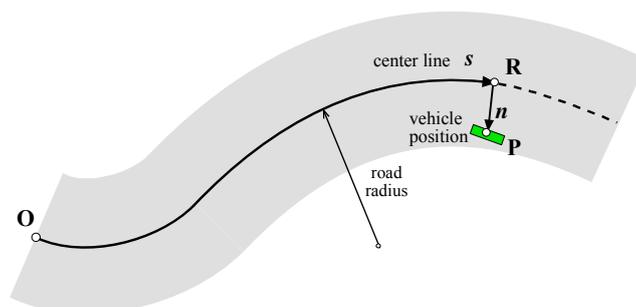


Figura 20 - Coordinate curvilinee

Il controllo di traiettoria utilizza le coordinate curvilinee per il tracciamento della posizione attuale del veicolo: s_V posizione del veicolo lungo il tracciato, n_V , posizione laterale rispetto alla linea di mezzzeria (Figura 20 e §1.4). La struttura è la seguente

$$\tau = \tau_{LP} + \tau_0$$

dove τ_{LP} è la coppia di sterzo calcolata dal PID e filtrata e τ_0 è la coppia di regime. In particolare il PID è costituito da 6 termini:

$$\begin{aligned} \tau_{PID} = & KP_\phi (\phi_T[s_F] - \phi_V) - K_{D\phi} \dot{\phi}_V - K_{I,\phi} \int \phi_V dt \\ & + KP_n (n_T[s_F] - n_V) - KD_n \dot{n}_V \\ & + KD_\psi (\dot{\psi}_V - u_V \Theta) \\ & + KD_\delta \dot{\delta}_V \end{aligned}$$

dove i suffissi V , F e T si riferiscono rispettivamente al veicolo, al punto osservato di fronte al veicolo, e alla variabili desiderate, ϕ , ψ , δ sono il rollio, l'imbardata e lo sterzo, u è la velocità del veicolo, Θ è la curvatura della strada. La prima riga è un PID sull'angolo di rollio e ha primariamente la funzione di stabilizzare il capsizing del veicolo, la seconda riga è un PD sulla posizione laterale e ha la funzione di mantenere il veicolo in traiettoria, la terza riga è un controllo proporzionale sulla velocità di imbardata, che ha lo scopo di stabilizzare il modo weave, la quarta riga è un controllo derivativo sull'angolo dello sterzo che ha lo scopo di stabilizzare il modo wobble.

In generale è opportuno verificare la controllabilità e osservabilità del sistema prima di fare qualsiasi considerazione sulla ottimizzazione dei guadagni: è necessario cioè verificare che il controllore possa potenzialmente guidare il sistema. Entrambe le caratteristiche sono state verificate in un modello semplificato di motociclo che includeva le sole variabili fuori del piano (spostamento laterale, imbardata, rollio, sterzo), essenzialmente Sharp'71 [18]: è stato verificato che le matrici di controllabilità e di osservabilità del sistema sono a rango pieno (metodo di Kalman, [59]) data la struttura del controllore PID sopra definita. Alternativamente si può verificare anche che, linearizzato il sistema e convertito in coordinate principali \mathbf{q}

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{A} \mathbf{q} + \mathbf{B} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C} \mathbf{q} \end{aligned}$$

né la matrice \mathbf{B} né la matrice \mathbf{C} hanno alcuna riga nulla: il controllore raggiunge tutti i modi di vibrare del sistema (matrice \mathbf{B}), e osserva tutti i modi del sistema (matrice \mathbf{C}).

E' necessario calcolare dei guadagni che stabilizzino il sistema e minimizzino l'errore di traiettoria. Da un punto di vista matematico, la stabilità è assicurata quanto tutti gli autovalori λ_i del sistema hanno parte reale negativa, dunque ci sarà un vincolo unilaterale del tipo

$$\text{Re}(\lambda_i) < 0$$

Per quanto riguarda la traiettoria, viene utilizzata una funzione penalità del tipo

$$J_{trajectory} = w_n \int (n_V - n_T)^2 dt + w_\phi \int (\phi_V - \phi_T)^2 dt$$

dove w_n e w_ϕ sono i pesi dell'errore sulla posizione laterale e sull'angolo di rollio. Ulteriori vincoli sono necessari per tenere conto della larghezza della strada, delle limitate capacità fisiche del pilota e per evitare l'overshoot dell'angolo di rollio

$$\begin{aligned} |n_V| &< n_{max} \\ |\tau| &< \tau_{max} \\ |\phi| &< \phi_{max} \end{aligned}$$

I vincoli unilaterali appena descritti sono stati convertiti in equivalenti funzioni costo in modo da poter effettuare una ottimizzazione non-vincolata. In Figura 21 è rappresentata la funzione costo necessaria per tenere in considerazione il vincolo unilaterale sulla larghezza della strada. Inutile dire che è molto importante la forma della funzione costo utilizzata in sostituzione dei vincoli unilaterali al fine di una corretta ottimizzazione.

Alla fine dunque il costo totale da minimizzare è

$$J = J_{stability} + J_{unilateral} + J_{trajectory}$$

E' stato inoltre riscontrata un miglioramento nelle prestazioni dell'ottimizzatore quando viene aggiunta un ulteriore voce di costo legata alla velocità di imbardata

$$w_\psi \int (\dot{\psi}_V - \dot{\psi}_T)^2 dt$$

Per l'ottimizzazione viene utilizzato un algoritmo non derivativo.

Poichè la valutazione della funzione costo esatta è molto onerosa computazionalmente (è necessario integrare le equazioni del moto del sistema non-lineare), viene utilizzata una differente strategia. La funzione costo viene calcolata sul sistema linearizzato attorno ad una configurazione di equilibrio opportuna e dipendente dal tipo di manovra (per un lane-change o

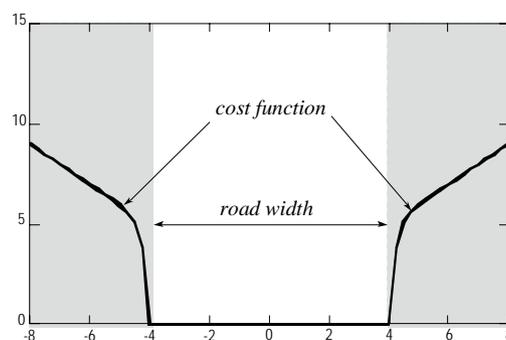


Figura 21 - Funzione costo per la larghezza della strada

uno slalom si linearizza attorno alla posizione di equilibrio in moto rettilineo, per un ingresso in curva si linearizza attorno alla posizione di equilibrio in curva). Inoltre le traiettorie desiderate sono calcolate come combinazione di funzioni semplici, delle quali sono note le trasformate di Laplace. In questo modo, la risposta del sistema può essere calcolata utilizzando il metodo di Laplace, e non integrando le equazioni del sistema. Per aumentare ulteriormente le prestazioni, le matrici di stato sono divise in blocchi, e ad ogni valutazione della funzione costo vengono ricalcolati solo i blocchi che dipendono dai guadagni del controllore.

In Figura 22 è rappresentato lo schema per la valutazione della funzione costo. Nel ramo superiore entrano le equazioni linearizzate del sistema (motoveicolo e controllo) in coordinate indipendenti, mentre in quello inferiore il tipo di manovra da eseguire. Per il calcolo delle equazioni del sistema in coordinate indipendenti, viene calcolata la matrice di proiezione da coordinate dipendenti a indipendenti applicando una decomposizione SVD alla matrice dei vincoli ([53],[60]), che vengono calcolati automaticamente secondo quanto descritto in §1.10. Va sottolineato infine che per calcolare la risposta del sistema l'unica difficoltà risiede nella valutazione della funzione

$$U(s)/(s - \lambda_i)$$

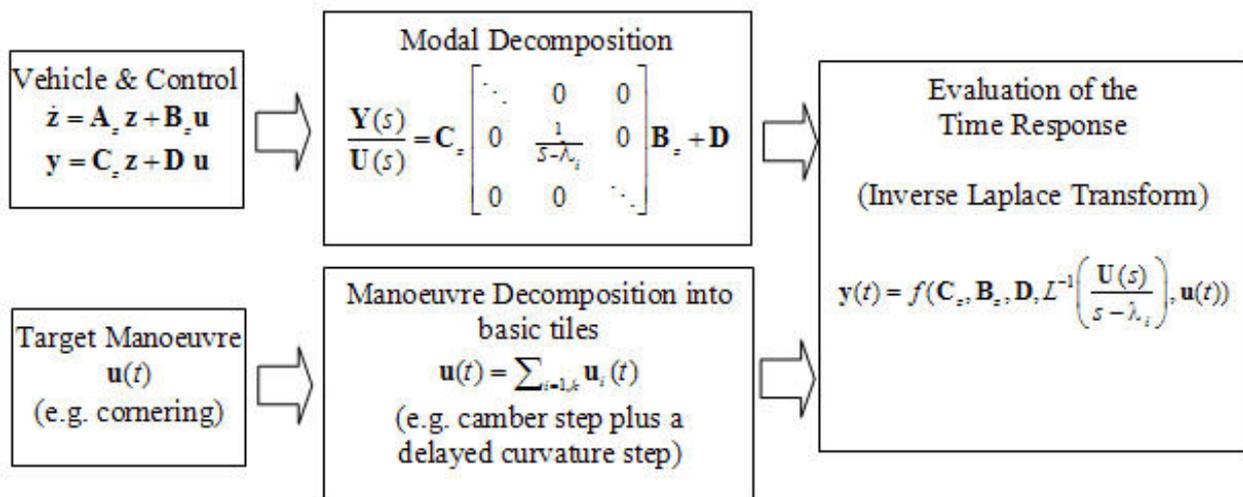


Figura 22 - Valutazione della risposta del sistema linearizzato

Il metodo appena descritto si rivela molto efficace (Figura 23) per il calcolo dei guadagni nel caso di manovre a velocità costante (che peraltro sono molto utilizzate a livello sperimentale per la valutazione delle caratteristiche di handling dei veicoli). Per ulteriori dettagli si veda [3].

E' stata testata un'estensione del metodo a manovre a velocità variabile, mediante utilizzo di "gain scheduling" dipendente dalla velocità del veicolo, con matrici di guadagni calcolate a diverse velocità con il metodo precedente. E' stata anche testato un "gain scheduling" simultaneo

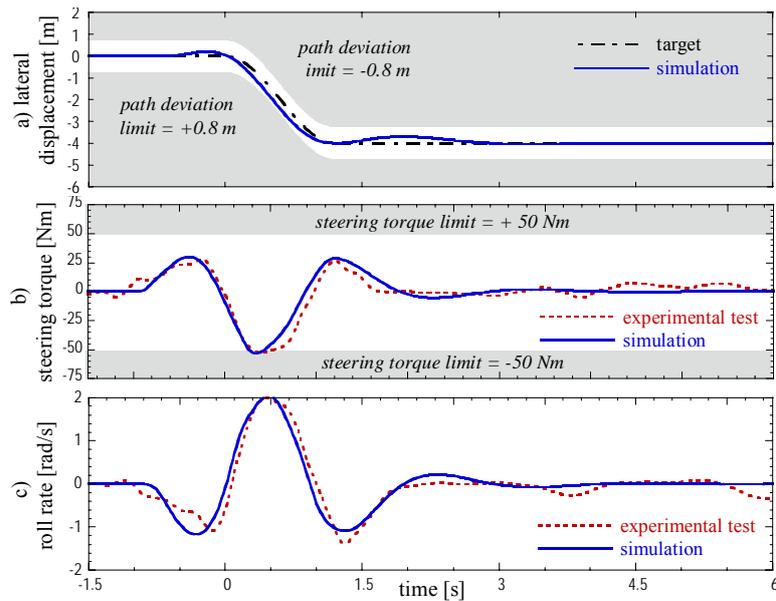


Figura 23 - Lane-change, $V=18$ m/s

su velocità e angolo di rollio. Il sistema si rivela stabile solo quando le variazioni di velocità sono limitate.

E' tuttora in fase di sviluppo un nuovo approccio, piuttosto differente dal precedente. Innanzitutto la traiettoria desiderata non è più arbitraria, ma è calcolata automaticamente da un codice di controllo ottimo (OM) che utilizza un modello semplificato di motoveicolo. In altre parole, l'utente decide le caratteristiche della strada da percorrere, il codice di controllo ottimo calcola la traiettoria ottima in termini di variabili di stato, un controllore PI si incarica di guidare il modello completo sulla traiettoria ottima del modello semplificato. L'utilizzo di un pianificatore di traiettoria è volto ad eliminare il rischio di definire traiettorie desiderate non fisicamente percorribili dal veicolo, per le quali non esiste un insieme di guadagni che consenta l'inseguimento della traiettoria desiderata con piccoli errori. Purtroppo non è possibile utilizzare direttamente gli ingressi calcolati dalla OM sul modello semplice per guidare il modello complesso (Figura 24): le differenze tra i modelli conducono inevitabilmente ad una caduta del modello complesso.

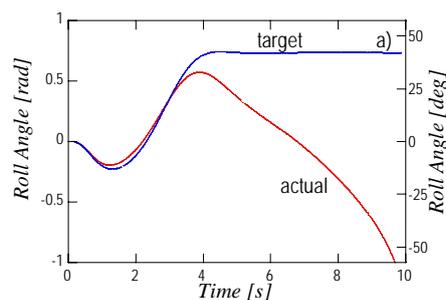


Figura 24 - Simulazione del modello complesso con ingressi ottimi del modello semplice

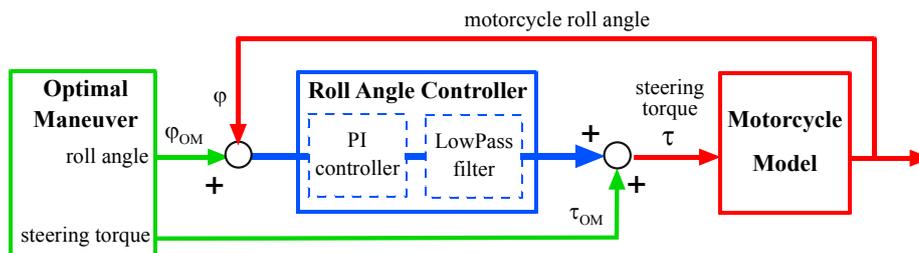
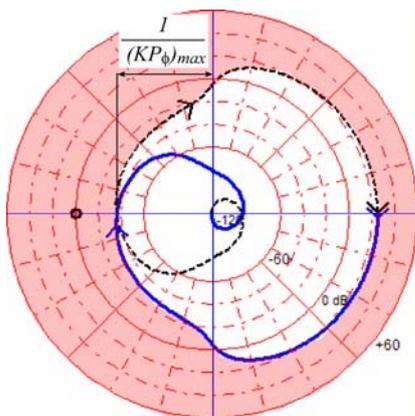
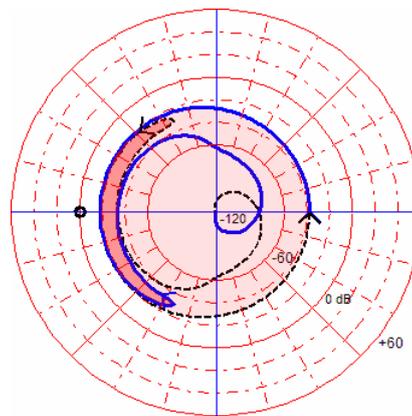


Figura 25 - Anello di rollio

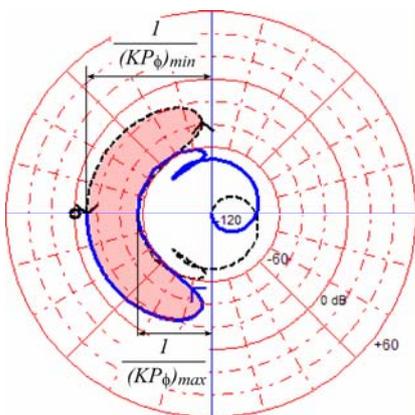
E' stato dunque implementato un anello di rollio con filtro passa-basso che consente di inseguire il rollio calcolato dal pianificatore, Figura 25. E' possibile definire il valore minimo e massimo del guadagno proporzionale applicando il criterio di Nyquist. Si può anche applicare il criterio di Bode se il sistema è stabile, ma il veicolo utilizzato non ha tutti i modi stabili in tutte le condizioni.



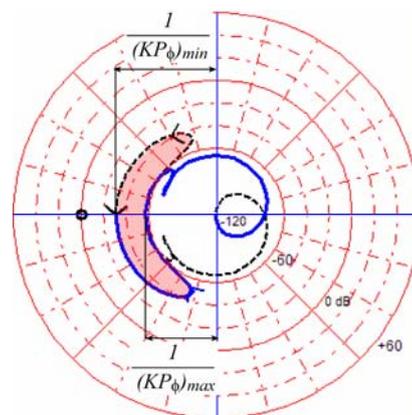
a) Velocità = 10 m/s – Accelerazione Laterale= 0 m/s².
 (tutti i modi sono stabili)



b) Velocità = 10 m/s – Accelerazione Laterale = 8 m/s².
 (un modo instabile: 0.2192 ± 0.2223j)



c) Velocità = 50 m/s – Accelerazione Laterale = 0 m/s².
 (modo capsized instabile: +0.0003 + 0j)



d) Velocità = 50 m/s – Accelerazione Laterale = 8 m/s².
 (modo capsized instabile: 0.0044 + 0j)

Figura 26 - Diagrammi di Nyquist per la funzione di trasferimento $T=PI*LP*M$ a diverse velocità e accelerazioni laterali (PI=-1, LP=filtro passa-baso, M= modello del veicolo)

A 10 m/s in rettilineo (Figura 26a) tutti i modi di vibrare sono stabili. Un anello di controllo stabile si può ottenere quando il diagramma di Nyquist non passa mai attorno al punto critico (-1,0). La Figura 26a mostra come calcolare il massimo valore del controllo che assicura la stabilità.

Alla stessa velocità ma con un rollio di 40° (Figura 26b) è presente un modo di vibrare instabile e a bassa frequenza: un anello stabile è assicurato quando il diagramma di Nyquist gira 2 volte in senso anti-orario attorno al punto critico. Questo è ottenuto semplicemente cambiando il valore del guadagno proporzionale, il cui effetto è quello di scalare il diagramma di Nyquist: in questo caso esiste un valore minimo e un valore massimo del guadagno.

A 50 m/s in rettilineo (Figura 26c) il modo capsizer (non vibrante) è instabile: per avere la stabilità dell'anello è necessario che il diagramma di Nyquist passi una volta in senso anti-orario attorno al punto critico. In Figura 26c sono evidenziati i valori minimi e massimi del controllo utilizzabili.

Infine, a 50 m/s e 8 m/s² (Figura 26d) la situazione è simile al caso in rettilineo (Figura 26c), ma l'insieme dei guadagni utilizzabili è ridotto.

Va anche detto che ci possono essere delle condizioni in cui il modo weave (2-4 Hz) o il modo wobble (6-10 Hz) possono diventare instabili. In generale questo controllo non è in grado di stabilizzare tali situazioni. Tuttavia nemmeno il pilota reale è in grado di governare queste instabilità: si tratta di fatto di zone *off-limits*.

La Figura 27 evidenzia come il controllore dia ottimi risultati nell'inseguimento di rollio, ma gli spostamenti laterali rispetto al centro strada rimangono incontrollati. Questo è dovuto sia al fatto che l'inseguimento non è perfetto, sia alla differenza dei modelli (allo stesso angolo di rollio le traiettorie percorse sono differenti). Si rende necessaria l'introduzione di un anello sulla posizione laterale, Figura 28.

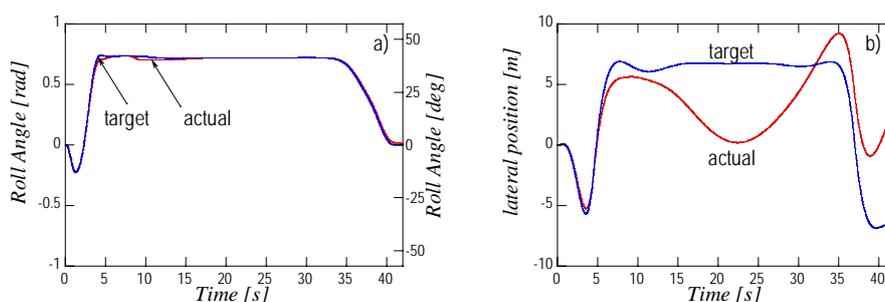


Figura 27 - Simulazioni con il solo anello di rollio

La strategia utilizzata è la seguente: poichè il controllore di rollio è stabile, l'errore di traiettoria viene trasformato in errore di rollio (*Path Deviation Controller* in Figura 28). E' stato introdotto un saturatore per evitare che il rollio desiderato, che ora dipende anche dall'errore sulla posizione laterale, ecceda i limiti fisici del veicolo (che sono legati alle caratteristiche del pneumatico). Ad esempio il saturatore impedisce che possa essere richiesto un rollio desiderato di 90°. Più in dettaglio, la correzione sul rollio desiderato è

$$\Delta\varphi = K_t(e_n + T_n\dot{e}_n)$$

con e_n errore sulla posizione laterale, K_t guadagno proporzionale, T_n costante di tempo dell'errore laterale quando $e_t \cong 0$. Utilizzando il criterio di Bode, è possibile determinare un valore opportuno di K_t che assicuri un margine di fase positivo alla frequenza in cui il modulo della funzione di trasferimento attraversa l'asse 0 dB, Figura 29. Dall'analisi di Figura 29 è altresì evidente come sia difficile avere un controllore molto veloce: alla frequenza del modo weave c'è infatti una notevole perdita di fase del sistema e il picco del modulo che fa facilmente saltare l'ipotesi di singolo attraversamento dell'asse 0 dB. Ciò preclude l'estensione della banda del controllore a frequenze superiori a circa 1 Hz a 20 m/s. Questa osservazione spiega anche la difficoltà di controllare il veicolo a basse velocità, alle quali la frequenza del modo weave, e dunque il punto nel quale si verifica la brusca perdita di fase, diminuisce e restringe ulteriormente la banda a disposizione del controllore. Per ulteriori dettagli si veda [4].

Infine qualche osservazione su un modello recentemente apparso nella letteratura [45] e che sembra particolarmente promettente. Il controllore agisce sull'angolo dello sterzo e non sulla coppia di sterzo. Al solito il controllo della funzione di trasferimento del motociclo tra coppia di sterzo o angolo di sterzo e rollio non pone particolari problemi in condizioni di moto convenzionali, quando cioè i modi weave e wobble sono stabili. Le difficoltà sono legate alla funzione di trasferimento tra coppia o angolo di sterzo e posizione laterale. Le due funzioni sono rappresentate in Figura 30.

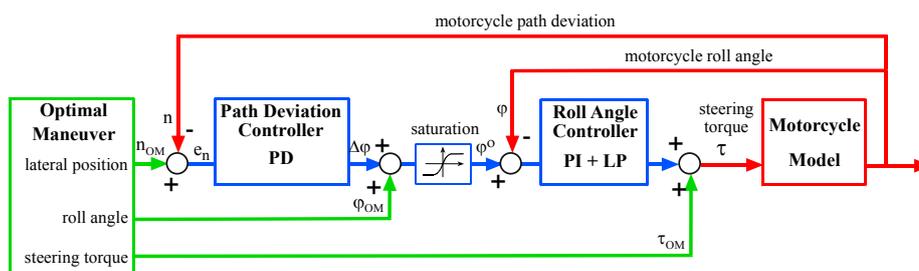


Figura 28 - Anello sulla posizione laterale

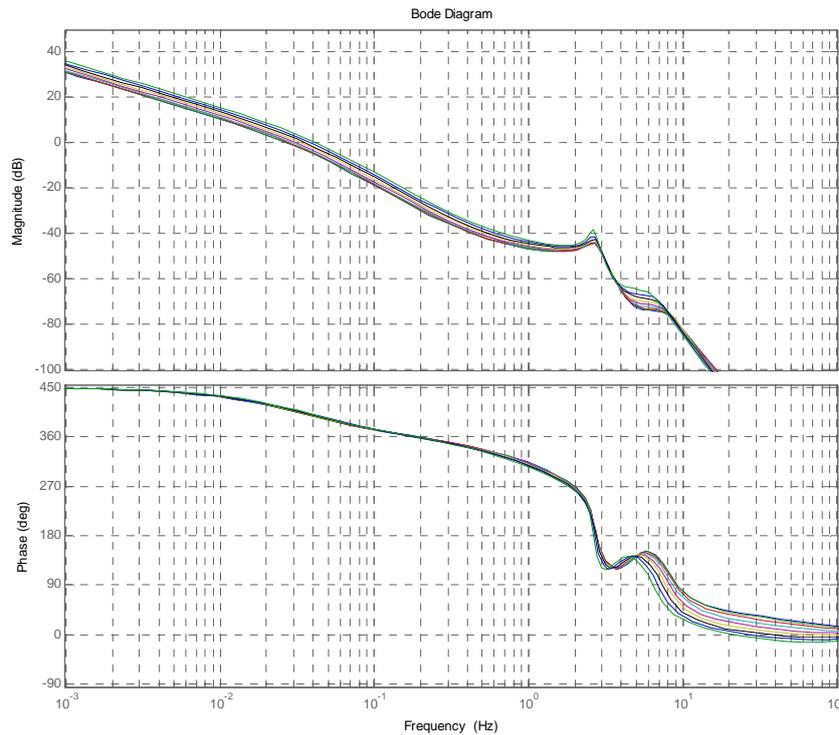


Figura 29 - Funzione di trasferimento tra errore di rollio e errore laterale

Sostanzialmente entrando con l'angolo di sterzo non si ha il modo wobble, e dunque si guadagnano 180° di fase per frequenze prossime e superiori a quelle del modo di vibrare wobble. Ovviamente come conseguenza dell'eliminazione del grado di libertà sterzo la motocicletta perde completamente l'effetto auto-stabilizzante, e sarà sempre instabile. In altre parole non c'è alcuna stabilità open-loop (è un pendolo inverso), ma il controllo closed-loop sembrerebbe potenzialmente più agevole. La coppia corrispondente alla legge imposta sull'angolo dello sterzo si calcola dall'equazione di equilibrio attorno all'asse dello sterzo, entrando con posizione, velocità e accelerazione dell'angolo dello sterzo. Sarebbe opportuno verificare che la banda e il valore assoluto della coppia di sterzo necessaria a soddisfare la legge imposta sull'angolo di sterzo siano compatibili con un pilota reale (limite sulla banda e sul valore assoluto). In altre parole non si può ritenere accettabile un controllore sull'angolo di sterzo che produca coppie di sterzo di 1000 Nm a 20 Hz. I dati pubblicati non consentono una tale verifica.

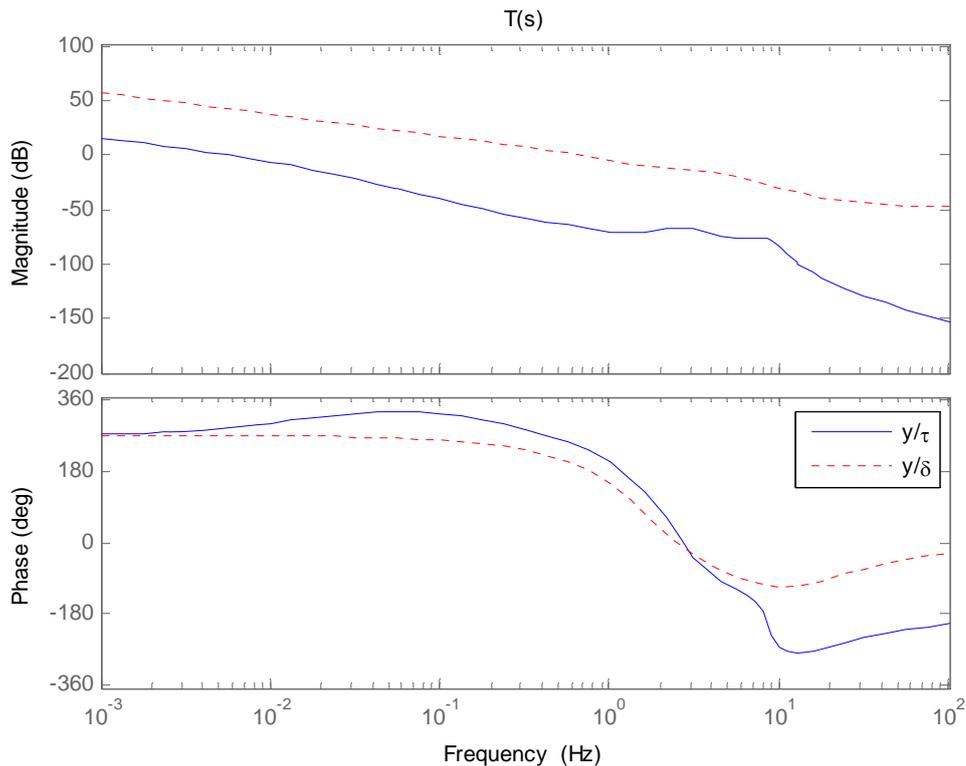


Figura 30 - Funzione di trasferimento tra coppia di sterzo e posizione laterale e tra angolo di sterzo e posizione laterale (modello di veicolo Sharp'71 a 20 m/s)

1.10 Calcolo automatico dell'indice DAE del sistema

In generale le equazioni che governano la dinamica dei sistemi meccanici costituiscono un sistema di equazioni non-lineari differenziali-algebriche (DAE): le equazioni del moto sono infatti differenziali (del secondo ordine) e le equazioni di vincolo sono algebriche. Si definisce indice DAE del sistema di equazioni il numero di volte che è necessario derivare il sistema affinché esso diventi completamente differenziale [60]. Nel caso in esame si ottiene un sistema DAE implicito di ordine 3. Spesso si converte il sistema DAE in un sistema differenziale (IDE o ODE) con la tecnica della stabilizzazione delle equazioni di vincolo [53],[60], mentre in questo caso il sistema è stato mantenuto in forma differenziale-algebrica ed è stato scelto un solutore in grado di gestire sistemi DAE con indice 3.

Per l'analisi modale del sistema si rende tuttavia necessaria la riduzione in forma completamente differenziale, in quanto il calcolo degli autovalori in presenza di n equazioni algebriche porta all'ottenimento di n autovalori infiniti e può anche compromettere il calcolo stesso. E' stato dunque sviluppato un algoritmo che permette l'identificazione automatica dei vincoli del sistema, e da questi consente di calcolare la matrice di proiezione che permette di

convertire il sistema DAE in un sistema ODE in coordinate indipendenti. I passi dell'algoritmo sono i seguenti:

1. $i_{DAE} = 0$;
2. linearizzazione del sistema DAE: $\mathbf{A}_{dot} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$;
3. calcolo del rango di \mathbf{A}_{dot} : se è pieno EXIT, altrimenti $i_{DAE} = i_{DAE} + 1$;
4. triangolarizzazione del sistema mediante decomposizione LU: tutte le n_i equazioni algebriche si spostano nelle ultime n_i righe della matrice \mathbf{A} , mentre le corrispondenti righe di \mathbf{A}_{dot} saranno nulle;
5. salvataggio delle equazioni algebriche di vincolo Φ_i ;
6. derivazione delle n_i equazioni di vincolo Φ_i (che equivale a spostare le n_i ultime righe di \mathbf{A}_{dot} nelle n_i ultime righe di \mathbf{A} (prima nulle))
7. ritornare al punto 3.

All'uscita dell'algoritmo si calcola la matrice di proiezione \mathbf{R} nota la matrice dei vincoli ([3],[53])

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{pmatrix}$$

Si riduce quindi il numero delle colonne di \mathbf{A}_{dot} , \mathbf{A} , \mathbf{B} post-moltiplicando per \mathbf{R} , e si riduce il numero delle righe mediante decomposizione LU. E' possibile finalmente calcolare gli autovalori/autovettori del sistema differenziale ottenuto.

Da sottolineare la necessità di prestare particolare attenzione alla definizione dello zero numerico (necessario a determinare se un'equazione sia algebrica o meno), alla scalatura delle equazioni e al calcolo dello Jacobiano (la tecnica delle differenze centrali è stata preferita alle differenze indietro o in avanti in quanto l'errore è proporzionale al quadrato del passo di discretizzazione invece che al passo di discretizzazione).

1.11 Ottimizzazione dell'assetto

La velocità del codice nel calcolo delle configurazioni di equilibrio (cinetostatica §1.2) ha consentito l'introduzione di un ottimizzatore dell'assetto del veicolo. L'ottimizzatore è particolarmente utile in quanto molti parametri di interesse nella progettazione del motociclo non sono direttamente controllabili, cioè sono parametri dipendenti. Esempi di parametri dipendenti sono il passo del veicolo e l'avancorsa normale: nessuno dei due può essere fissato direttamente, ma possono essere fissati solo i parametri indipendenti da cui essi dipendono (il raggio della ruota, la distanza tra il centro della ruota e l'asse dello sterzo, la lunghezza del forcellone

oscillante posteriore, etc.). Il calcolo dei parametri dipendenti in condizioni di tutto esteso è piuttosto semplice in quanto si riduce alla soluzione delle equazioni dei poligoni di chiusura associati: in questo caso non è necessario un ottimizzatore, ma solo un solutore di sistemi algebrici non-lineari. Al contrario, nelle condizioni nominali (con l'effetto della gravità e quindi con la compressione delle sospensioni) i parametri dipendenti sono funzione anche delle caratteristiche delle sospensioni e dalla distribuzione dei baricentri: si rende quindi necessario un ottimizzatore. E' stato utilizzato un ottimizzatore non derivativo. Le ottimizzazioni si possono fare non solo in condizioni nominali (veicolo fermo), ma a qualsiasi velocità di avanzamento e accelerazione longitudinale e laterale. Ad esempio è possibile verificare il valore dell'avancorsa normale nella staccata a massima decelerazione (notoriamente utilizzata per il setting della sospensione anteriore), l'affondamento delle sospensioni nella curva a massima accelerazione laterale, il valore dell'angolo di squat nel punto di massima accelerazione.

Per ulteriori dettagli si veda [5].

1.12 Decomposizione della coppia di sterzo

La coppia di sterzo applicata dal pilota sul manubrio è uguale e contraria alla coppia prodotta dalle forze esterne agenti sull'avantreno. Vengono di seguito riportate le formulazioni utilizzate per il calcolo delle singole componenti, dove x_i, y_i, z_i sono le coordinate dell'origine della terna T_i ($i=3$: terna $T3=HANDLEBAR$, $i=6$: terna $T6=FRONT_UNSPRUNG$, $i=4$: terna $T4=FRONT_WHEEL$), ψ_i, ϕ_i, μ_i sono l'imbardata, il rollio e il beccheggio della terna T_i , y_{cf} e z_{cf} sono le coordinate y e z del punto di contatto della ruota anteriore in terna $T4$, $g_{x_i}, g_{y_i}, g_{z_i}$ la posizione del baricentro del corpo attaccato alla terna T_i in terna T_i , $VS0, VN0, \Omega0$ le velocità (longitudinale, laterale, di imbardata) dell'origine della terna mobile. Sono stati calcolati i contributi dovuti alla forza longitudinale del pneumatico SS

$$\begin{aligned} \tau_{SS} := & SS \left(\left((s(\phi3) (z_{cf} c(\phi4) - z3 + y_{cf} s(\phi4) + z4) c(\psi3) \right. \right. \\ & - c(\phi3) (y3 - y4)) c(\psi4) + (s(\phi3) (z_{cf} c(\phi4) - z3 \\ & + y_{cf} s(\phi4) + z4) s(\psi3) + c(\phi3) (x3 - x4)) s(\psi4) \\ & - c(\phi3) (-y_{cf} c(\phi4) + z_{cf} s(\phi4)) c(\mu3) \\ & - s(\mu3) (z_{cf} c(\phi4) - z3 + y_{cf} s(\phi4) + z4) (c(\psi4) s(\psi3) \\ & \left. \left. - c(\psi3) s(\psi4)) \right) \right) \end{aligned}$$

alla forza laterale del pneumatico FF

$$\begin{aligned} \tau_{FF} := & \left((s(\phi3) (z_{cf} c(\phi4) - z3 + y_{cf} s(\phi4) + z4) s(\psi3) \right. \\ & + c(\phi3) (x3 - x4)) c(\psi4) - s(\psi4) (s(\phi3) (z_{cf} c(\phi4) - z3 \\ & + y_{cf} s(\phi4) + z4) c(\psi3) - c(\phi3) (y3 - y4)) c(\mu3) \\ & + s(\mu3) (z_{cf} c(\phi4) - z3 + y_{cf} s(\phi4) + z4) (s(\psi4) s(\psi3) \\ & \left. \left. + c(\psi3) c(\psi4)) \right) FF \end{aligned}$$

alla forza normale del pneumatico NN

$$\begin{aligned}\tau_{NN} := & -((c(\mu_3) ((-zcf s(\phi_4) + ycf c(\phi_4)) s(\psi_4) - x_4 \\ & + x_3) s(\phi_3) - s(\mu_3) ((-zcf s(\phi_4) + ycf c(\phi_4)) c(\psi_4) \\ & + y_4 - y_3)) c(\psi_3) - (c(\mu_3) ((-zcf s(\phi_4) \\ & + ycf c(\phi_4)) c(\psi_4) + y_4 - y_3) s(\phi_3) + ((-zcf s(\phi_4) \\ & + ycf c(\phi_4)) s(\psi_4) - x_4 + x_3) s(\mu_3)) s(\psi_3)) NN\end{aligned}$$

al momento resistente di rotolamento del pneumatico MY

$$\begin{aligned}\tau_{MY} := & MY (s(\mu_3) (-c(\psi_4) s(\psi_3) + c(\psi_3) s(\psi_4)) \\ & + c(\mu_3) (s(\psi_4) s(\psi_3) + c(\psi_3) c(\psi_4)) s(\phi_3))\end{aligned}$$

al momento di imbardata del pneumatico MZ

$$\tau_{MZ} := -c(\phi_3) c(\mu_3) MZ$$

alla forza peso del manubrio

$$\tau_{m_3} := (-g_3x s(\phi_3) - s(\mu_3) c(\phi_3) g_3y) m_3 g$$

alla forza peso della ruota anteriore

$$\begin{aligned}\tau_{m_4} := & ((c(\mu_3) (-g_4x c(\psi_4) + (-g_4z s(\phi_4) \\ & + c(\phi_4) g_4y) s(\psi_4) - x_4 + x_3) s(\phi_3) + s(\mu_3) ((g_4z s(\phi_4) \\ & - c(\phi_4) g_4y) c(\psi_4) - g_4x s(\psi_4) - y_4 + y_3)) c(\psi_3) - (\\ & -((g_4z s(\phi_4) - c(\phi_4) g_4y) c(\psi_4) - g_4x s(\psi_4) - y_4 \\ & + y_3) c(\mu_3) s(\phi_3) + s(\mu_3) (-g_4x c(\psi_4) + (-g_4z s(\phi_4) \\ & + c(\phi_4) g_4y) s(\psi_4) - x_4 + x_3)) s(\psi_3)) g m_4\end{aligned}$$

alla forza peso della massa non sospesa

$$\begin{aligned}\tau_{m_6} := & ((-((g_6z s(\mu_6) + g_6x c(\mu_6)) c(\psi_6) + ((g_6z c(\mu_6) \\ & - g_6x s(\mu_6)) s(\phi_6) - g_6y c(\phi_6)) s(\psi_6) + x_6 - x_3) \\ & c(\mu_3) s(\phi_3) - (((-g_6z c(\mu_6) + g_6x s(\mu_6)) s(\phi_6) \\ & + g_6y c(\phi_6)) c(\psi_6) + (g_6z s(\mu_6) + g_6x c(\mu_6)) s(\psi_6) \\ & - y_3 + y_6) s(\mu_3)) c(\psi_3) + s(\psi_3) (-c(\mu_3) (((\\ & -g_6z c(\mu_6) + g_6x s(\mu_6)) s(\phi_6) + g_6y c(\phi_6)) c(\psi_6) \\ & + (g_6z s(\mu_6) + g_6x c(\mu_6)) s(\psi_6) - y_3 + y_6) s(\phi_3) \\ & + ((g_6z s(\mu_6) + g_6x c(\mu_6)) c(\psi_6) + ((g_6z c(\mu_6) \\ & - g_6x s(\mu_6)) s(\phi_6) - g_6y c(\phi_6)) s(\psi_6) + x_6 - x_3) \\ & s(\mu_3))) m_6 g\end{aligned}$$

all'effetto giroscopico

$$\begin{aligned}\tau_{gyro} := & c(\phi_4) \Omega_{0z}(t) ((s(\phi_3) c(\mu_3) s(\psi_4) \\ & - s(\mu_3) c(\psi_4)) c(\psi_3) - s(\psi_3) (s(\mu_3) s(\psi_4) \\ & + s(\phi_3) c(\mu_3) c(\psi_4))) I_{yy4} \left(\frac{d}{dt} \mu_4(t) \right)\end{aligned}$$

alla forza centrifuga del manubrio

$$\begin{aligned} \tau_{cen_m3} := & \Omega_{0z}(t) \left((g_{3y} (-2 g_{3x} + c(\mu_3)^2 g_{3x} \right. \\ & + s(\mu_3) g_{3z} c(\mu_3)) c(\phi_3)^2 + ((g_{3z} g_{3x} c(\mu_3) + (-g_{3x}^2 \\ & + g_{3y}^2) s(\mu_3)) s(\phi_3) + g_{3x} (-y_3 c(\psi_3) + x_3 s(\psi_3))) \\ & c(\phi_3) + g_{3y} (-s(\mu_3) (-y_3 c(\psi_3) + x_3 s(\psi_3)) s(\phi_3) \\ & + (y_3 s(\psi_3) + x_3 c(\psi_3)) c(\mu_3) + g_{3x})) \Omega_{0z}(t) \\ & + g_{3x} (VS0(t) c(\psi_3) + VN0(t) s(\psi_3)) c(\phi_3) \\ & - g_{3y} (s(\mu_3) (VS0(t) c(\psi_3) + VN0(t) s(\psi_3)) s(\phi_3) \\ & \left. + c(\mu_3) (VS0(t) s(\psi_3) - VN0(t) c(\psi_3))) \right) m_3 \end{aligned}$$

alla forza centrifuga della massa non sospesa anteriore

(non riportata per brevità)

alla forza centrifuga della ruota anteriore

(non riportata per brevità)

Capitolo 2: simulazioni

Vengono di seguito presentate delle simulazioni volte a mostrare alcune delle possibili applicazioni del codice *FastBike*. In particolare verrà presentato un esempio di calcolo di rigidzze equivalenti al punto di contatto ruota-terreno, un esempio di decomposizione della coppia dello sterzo, un esempio di analisi dell'effetto delle flessibilità strutturali sulla stabilità del veicolo mediante calcolo degli autovalori, un'analisi del fenomeno noto come chatter sia mediante il calcolo degli autovalori che mediante simulazioni nel dominio del tempo, un'analisi del fenomeno noto come kick-back.

2.1 Calcolo della rigidzza equivalente

In questa sezione viene presentato e commentato l'output della nuova funzione ESC, introdotto in *FastBike* per consentire il calcolo delle rigidzze equivalenti al punto di contatto anteriore e posteriore (§1.3). Nel file dei risultati viene riportata la soluzione cinetostatica senza forze laterali applicate e con le sospensioni in posizione di tutto esteso, la soluzione cinetostatica senza forze laterali applicate considerando la corsa delle sospensioni, e infine la configurazione con forze laterali applicate sui punti di contatto (in questo esempio sono state fissate a 250 N), considerando la corsa delle sospensioni e con la terna *CHASSIS_HEAD* (o *T7*) fissata al riferimento assoluto. Di seguito viene commentata la parte relativa alla configurazione deformata, che costituisce una delle novità introdotte nel codice.

Le 6 righe seguenti riportano la posizione dell'origine e l'orientazione della terna *T7* quando la forza laterale è applicata (colonna di sinistra) e quando la forza laterale è nulla (colonna di destra): di fatto è una verifica dell'incastro della terna *CHASSIS_HEAD*.

```
O7x   =   -0.7519 SSA=   -0.7519
O7y   =    0.0000 SSA=    0.0000
O7z   =   -0.3239 SSA=   -0.3239
Yaw7  =    0.0000 SSA=    0.0000
Roll7 =    0.0000 SSA=    0.0000
Pitch7=    0.5171 SSA=    0.5171
```

Norma 2 dei residui delle equazioni del moto quando viene applicata la forza laterale
TOTRES=1.7743E-15

Carichi sui pneumatici (posteriore e anteriore) quando viene applicata la forza laterale

```
tire loads, Fy<>0:   1875.4   1179.0
```

Carichi sui pneumatici (posteriore e anteriore) quando non viene applicata la forza laterale

```
tire loads, Fy==0:   1874.8   1177.4
```

Tutti i risultati seguenti sono relativi alla ruota posteriore. Le rigidzze calcolate sono la combinazione della rigidzza del cerchione, del forcellone oscillante e della parte posteriore del telaio.

REAR WHEEL:

Carico laterale (in N) applicato alla ruota

FY= 250.0:

Posizione X,Y,Z (in m) del punto di contatto posteriore rispetto ad una terna assoluta con origine sul terreno sotto l'origine della terna T3, tenendo in considerazione la rigidzza della carcassa, quando la forza laterale è pari a 250 N.

xCP= -1.2128
yCP= 0.0051
zCP= 0.0000

Come sopra, ma senza considerare la deformazione della carcassa

xCP0= -1.2128
yCP0= 0.0045
zCP0= 0.0075

Imbardata (in rad) e rollio (in rad) della ruota

Yaw = -0.0031
Roll= -0.0029

Carico laterale (in N) applicato alla ruota

FY=0

Posizione X,Y,Z (in m) del punto di contatto posteriore rispetto ad una terna assoluta con origine sul terreno sotto l'origine della terna T3, tenendo in considerazione la rigidzza della carcassa, quando la forza laterale è nulla.

xCP= -1.2128
yCP= 0.0000
zCP= 0.0000

Come sopra, ma senza considerare la deformazione della carcassa

xCP0= -1.2128
yCP0= 0.0000
zCP0= 0.0075

Imbardata (in rad) e rollio (in rad) della ruota

Yaw = 0.0000
Roll= 0.0000

Differenze tra le posizioni del punto di contatto posteriore e gli angoli della ruota posteriore quando FY=250 N e quando FY=0

Delta X = 0.0000
Delta Y = 0.0051
Delta Z = 0.0000
Delta X0 = 0.0000 deformazione della carcassa non inclusa
Delta Y0 = 0.0045 deformazione della carcassa non inclusa

Delta Z0 = 0.0000 deformazione della carcassa non inclusa
Delta Yaw = -0.0031
Delta Roll = -0.0029

Rigidezze rotazionali alla ruota

STIFFNESS (SAE convention for angles and displacements)

Yaw Stiff (Fy/Yaw [N/rad]) = -81.080E+03

Roll Stiff (Fy/Roll [N/rad]) = -84.787E+03

Rigidizza laterale al punto di contatto, tenendo in considerazione la deformabilità della carcassa

Lat Stiff (Fy/y [N/m]) = 48.824E+03

Rigidizza laterale al punto di contatto, senza la deformabilità della carcassa

Lat Stiff0 (Fy/y0 [N/m]) = 56.043E+03

Angolo dell'asse di deformazione visto dal punto di contatto

Incline Angle [deg] = -46.3

Equazione dell'asse di deformazione, tenendo in considerazione la deformabilità della carcassa

TwistAxis eqn(a*x+b*z+c=0) a=-0.0031 b=0.0029 c=0.0051

Equazione dell'asse di deformazione, senza la deformabilità della carcassa

TwistAxis eqn0 c0=0.0045

Distanza dal punto di contatto all'asse di deformazione, con la deformabilità della carcassa

Distance CP-TwistAxis = 1.2002

Distanza dal punto di contatto all'asse di deformazione, senza la deformabilità della carcassa

Distance CP-TwistAxis0 = 1.0456

Valore assoluto dello spostamento del punto di contatto, con la flessibilità della carcassa

Delta (Whole Displ) [m] = 0.0051

Valore assoluto dello spostamento del punto di contatto, senza la flessibilità della carcassa

Delta0(Whole Displ) [m] = 0.0045

Rotazione attorno all'asse di deformazione, con la flessibilità della carcassa

Twist angle (delta/d)[rad] = 0.0043

Rotazione attorno all'asse di deformazione, senza la flessibilità della carcassa

Twist angle0(delta0/d0) = 0.0043

Braccio della forza laterale del pneumatico nella configurazione deformata

Fy arm is [m] = 1.0456

Braccio della forza normale del pneumatico nella configurazione deformata

N arm is [m] = 0.0035

Momento dovuto alla forza laterale del pneumatico

MFy: trq due to Fy is [Nm] = 261.4024

Momento dovuto alla forza normale del pneumatico

MN: trq sue to N is [Nm] = 6.6370

Rigidizza rispetto all'asse di deformazione, con la flessibilità della carcassa

TwistStiff (MFy+MN)/TwistAng [Nm/rad] = 62.827E+03

Rigidizza rispetto all'asse di deformazione, senza la flessibilità della carcassa

TwistStiff (MFy+MN)/TwistAng0 [Nm/rad] = 62.827E+03

Tutti i risultati seguenti sono relativi alla ruota anteriore. Le rigidzze calcolate sono la combinazione della rigidzza del cerchione, della forcella telescopica e della parte anteriore del telaio. Per quanto riguarda i commenti, si faccia riferimento a quelli sulla ruota posteriore sopra riportati.

FRONT WHEEL

```

FY=      250.0
        xCP=      0.3273
        yCP=      0.0049
        zCP=      0.0000
        xCP0=     0.3273
        yCP0=     0.0038
        zCP0=     0.0067
        Yaw =     -0.0044
        Roll=     -0.0079
    
```

```

FY=0
        xCP=      0.3273
        yCP=      0.0000
        zCP=      0.0000
        xCP0=     0.3273
        yCP0=     0.0000
        zCP0=     0.0067
        Yaw =      0.0000
        Roll=      0.0000
    
```

```

Delta X   =      0.0000
Delta Y   =      0.0049
Delta Z   =      0.0000
Delta X0  =      0.0000
Delta Y0  =      0.0038
Delta Z0  =      0.0000
Delta Yaw =     -0.0044
Delta Roll=     -0.0079
    
```

STIFFNESS (SAE convention for angles and displacements)

```

Yaw Stiff (Fy/Yaw [N/rad])=     -57.312E+03
Roll Stiff (Fy/Roll[N/rad])=    -31.669E+03
Lat Stiff (Fy/y [N/m] )=       51.473E+03
Lat Stiff0(Fy/y0 [N/m] )=      65.257E+03
    
```

```

Incline Angle [deg] )=          -28.9
TwistAxis eqn(a*x+b*z+c=0) a=-0.0044 b=0.0079 c =0.0049
TwistAxis eqn0                                c0=0.0038
Distance CP-TwistAxis =           0.5385
Distance CP-TwistAxis0 =          0.4248
    
```

```

Delta (Whole Displ) [m] =      0.0049
Delta0(Whole Displ) [m] =      0.0038
Twist angle (delta/d)[rad] 0.0090
Twist angle0(delta0/d0) =    0.0090
    
```

```

Fy arm is [m] =      0.4248
N arm is [m] =      0.0043
MFy: trq due to Fy is [Nm]= 106.1915
MN: trq sue to N is [Nm]=   5.0122
TwistStiff (MFy+MN)/TwistAng [Nm/rad]= 12.330E+03
TwistStiff (MFy+MN)/TwistAng0[Nm/rad]= 12.330E+03
    
```

2.2 Calcolo delle componenti della coppia di sterzo

Si riporta un esempio della decomposizione della coppia di sterzo di un veicolo per velocità da 10 a 50 m/s e accelerazione laterale pari a 5 m/s^2 (angolo di rollio di circa 30° verso destra). La coppia di sterzo percepita dal pilota è circa 6.5 Nm (*actual torque (whole)* in Figura 31), positiva e dunque oraria in accordo con la convenzione SAE: il pilota deve dunque “tirare” con il braccio destro il manubrio e non spingere o “sostenere” come si usa dire.

I termini principali sono dovuti ai momenti della forza laterale e alla forza normale agenti sul pneumatico anteriore. In particolare la forza laterale (*FF: lateral force*) produce un momento di circa 50 Nm, positivo, che tende a riallineare il pneumatico cioè a ridurre l’angolo di sterzo (che è sempre positivo secondo la convenzione SAE nella simulazione presentata), mentre la forza normale (*NN: tire normal load*) produce un momento di circa -40 Nm, negativo, disallineante, che tende ad aumentare l’angolo di sterzo. In generale si preferisce un veicolo nel quale prevalgono i momenti disallineanti, cioè negativi, in modo che il pilota debba “sostenere” il manubrio, cioè impedire un aumento dell’angolo di sterzo. Altri effetti non trascurabili sono il momento di rotolamento del pneumatico (*MY: tire rolling torque*), 12.5 Nm allineante, che ha una componente lungo l’asse dello sterzo quando il veicolo è inclinato, e il momento di imbardata del pneumatico (*MZ: tire twist+align torque*), -14 Nm, disallineante. Il momento di imbardata del pneumatico è il risultante dell’effetto allineante legato alla deriva laterale e all’effetto disallineante legato al rollio [11]. Dalla Figura 31 si vede come la accelerazione gravitazionale dia luogo a tre momenti disallineanti: -9 Nm dovuto alla massa del manubrio (*G3: handlebar weight*), -5 Nm dovuto alla massa del pneumatico anteriore (*G4: wheel weight*) e -1 Nm (*G6: unsprung weight*) legato alla massa non sospesa anteriore. Le forze centrifughe producono coppie allineanti: 7.5 Nm per la massa del manubrio (*M3: handlebar centrifugal torque*), 4 Nm per la ruota anteriore (*M4: wheel centrifugal torque*) e 1 Nm per la massa non sospesa (*M6: unsprung centrifugal torque*). Infine l’effetto giroscopico (*GYRO*) produce una coppia di circa 4 Nm allineante e la forza di resistenza al rotolamento della ruota anteriore (*SS: long force*) una coppia disallineante di -2.5 Nm.

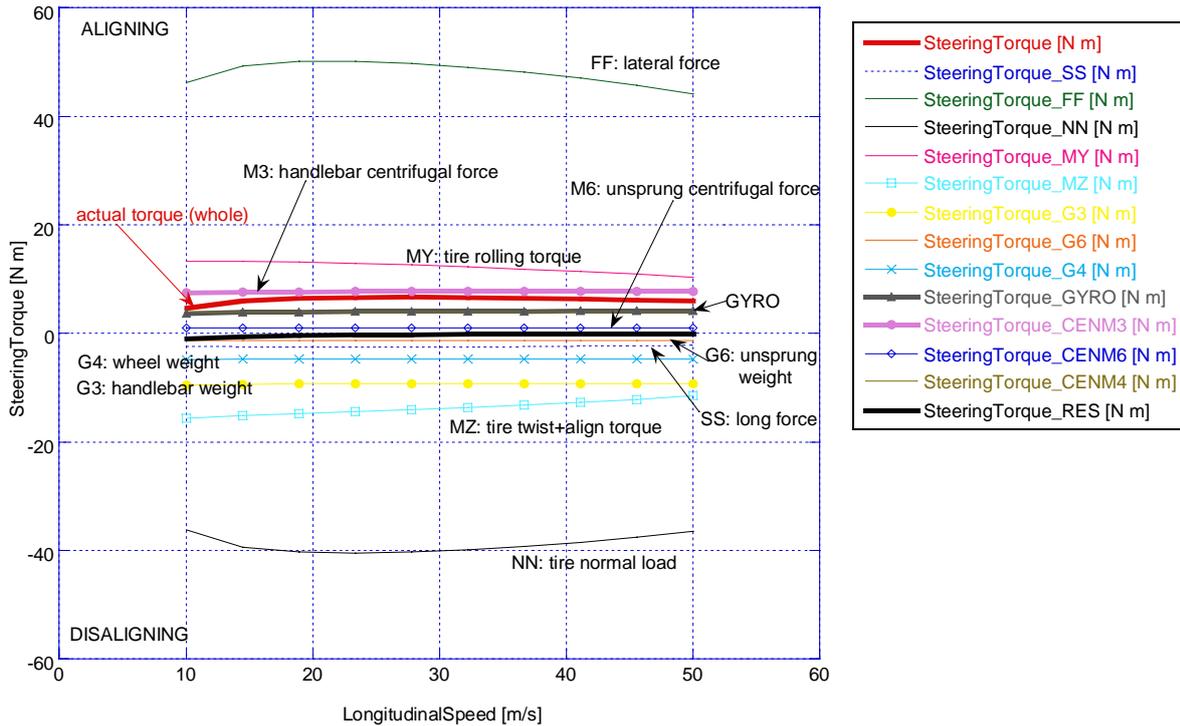


Figura 31 - Decomposizione della coppia di sterzo

2.3 Effetto delle flessibilità strutturali sulla stabilità

L'analisi di stabilità open-loop (senza tenere in considerazione l'impedenza del pilota, cioè senza mani sul manubrio) è condotta per via numerica calcolando gli autovalori in rettilineo a diverse velocità per 3 diversi motocicli: uno scooter, un motociclo touring ed uno sportivo.

Quando viene considerata la sola torsione dell'avantreno rispetto al retrotreno e/o la flessione laterale della forcella l'effetto è il medesimo (qualitativamente) in tutti e tre i veicoli: stabilizzazione del modo wobble ad alta velocità, destabilizzazione del wobble a bassa velocità e destabilizzazione del weave ad alta velocità. I primi due effetti sono più marcati del terzo. In Figura 32, Figura 33, Figura 34 è presentato l'effetto sul modo wobble. La velocità oltre la quale l'effetto della flessibilità è stabilizzante è 26 m/s per lo scooter, 28 m/s per il motociclo touring, e 39 m/s per il veicolo sportivo. L'effetto è fortemente dipendente alla velocità, in quanto legato all'effetto giroscopico dovuto alle velocità di deformazione a flessione laterale dell'avantreno [14]. Lo scooter presenta un'instabilità wobble senza mani (confermata sperimentalmente), a bassa velocità (< 22 m/s) mentre risulta stabile con le mani del conducente sul manubrio. Il suo campo di utilizzo è prevalentemente nella zona dove la flessibilità è destabilizzante. Il veicolo touring ha un effetto dovuto alla flessibilità anteriore molto marcato, che porta il veicolo ad avere uno smorzamento quasi nullo a 15 m/s e ad essere molto stabile (dal punto di vista del modo wobble) alla massima velocità (50 m/s). Infine nel veicolo sportivo l'effetto della flessibilità è meno marcato rispetto ai due casi precedenti, ma comunque non trascurabile. Il

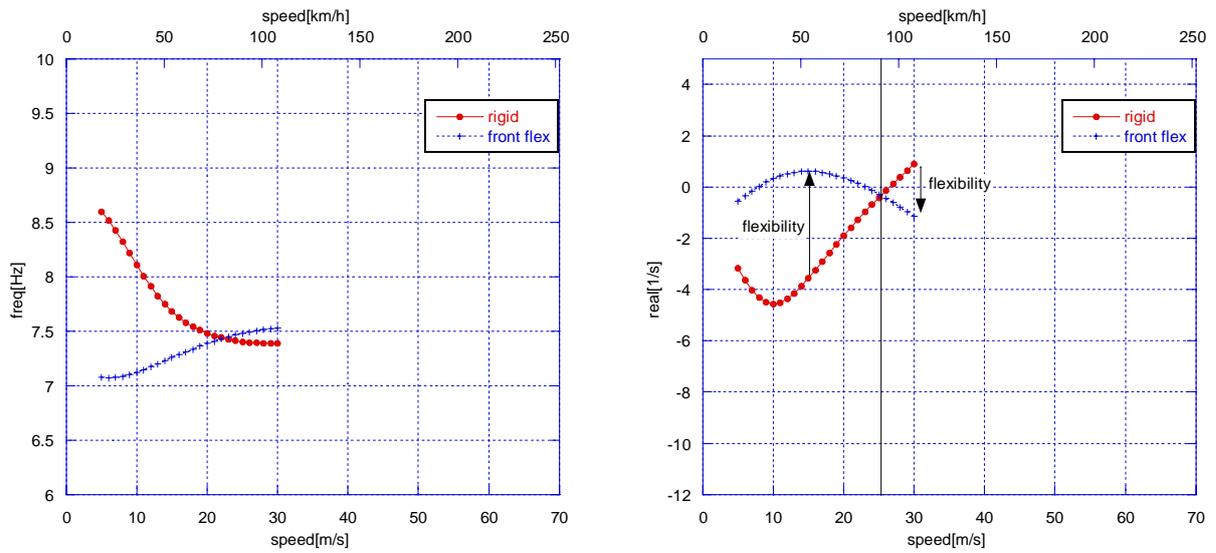


Figura 32 - Effetto della flessibilità anteriore sul modo wobble, scooter

modello prevede un'instabilità wobble (senza mani sul manubrio) intorno a 65 m/s. A differenza delle flessibilità dell'avantreno, le flessibilità del retrotreno (forcellone posteriore e/o parte posteriore del telaio) conducono a risultati diversi per i tre veicoli nei riguardi della stabilità del modo weave. In particolare, nel caso dello scooter (Figura 35) la torsione destabilizza sempre modo weave per velocità superiori a 20 m/s, mentre la flessione destabilizza leggermente il modo solo fino a 40 m/s, poi l'effetto è leggermente stabilizzante. Sono comunque velocità non raggiungibili dallo scooter, e volutamente non sono state riportate nei grafici.

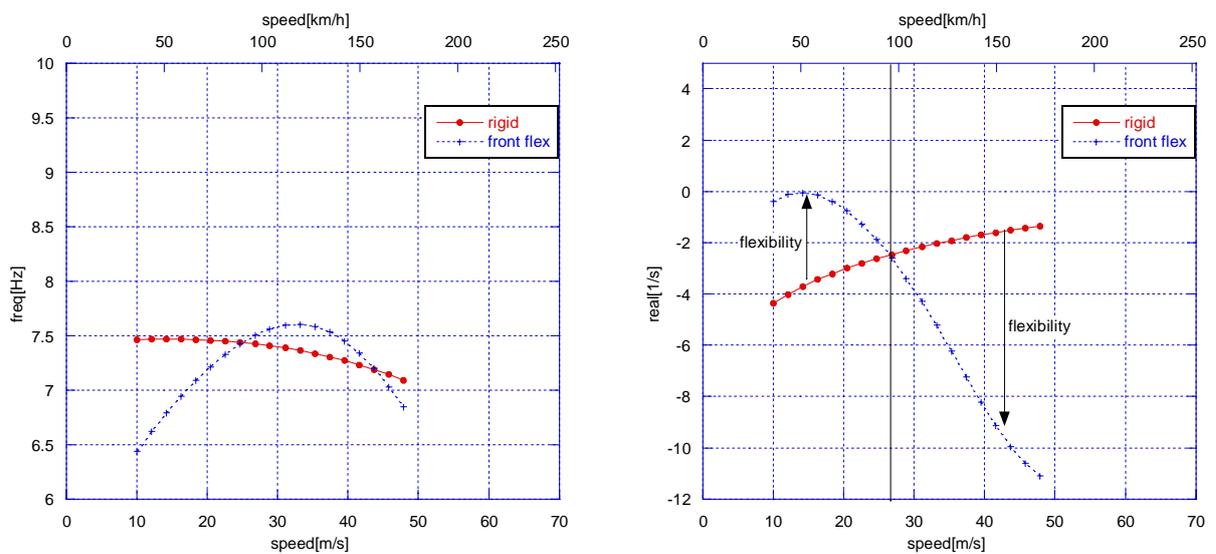


Figura 33 - Effetto della flessibilità anteriore sul modo wobble, moto touring

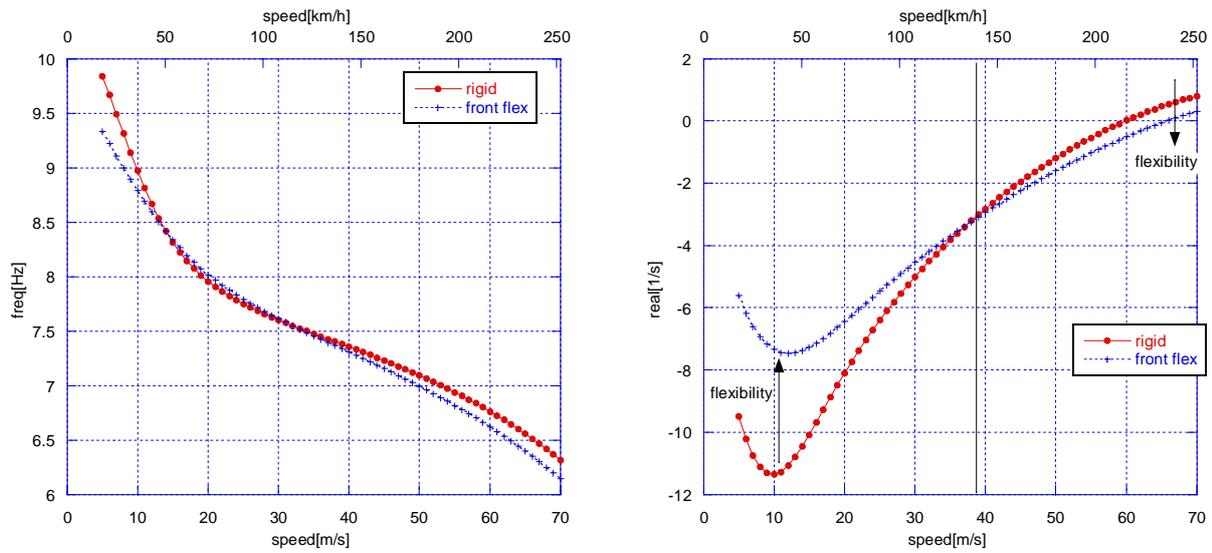


Figura 34 - Effetto della flessibilità anteriore sul modo wobble, moto sportiva

Tuttavia le simulazioni numeriche indicano una velocità alla quale l'effetto diventa stabilizzante. Nel caso del motociclo touring la flessibilità di torsione è ancora destabilizzante, l'effetto della flessione è anch'esso destabilizzante, ma ancora va riducendosi con l'aumentare della velocità. Non è stata individuata una velocità oltre la quale l'effetto diventa stabilizzante. Infine nel veicolo sportivo l'effetto della flessibilità è molto meno marcato: la torsione è stabilizzante e la flessione destabilizzante (almeno fino a 70 m/s). Va sottolineato che l'eventuale velocità di cambio oltre la quale l'effetto di flessione è stabilizzante dipende dal veicolo, e che l'effetto della torsione ha effetti diversi nei primi due e nel terzo veicolo.

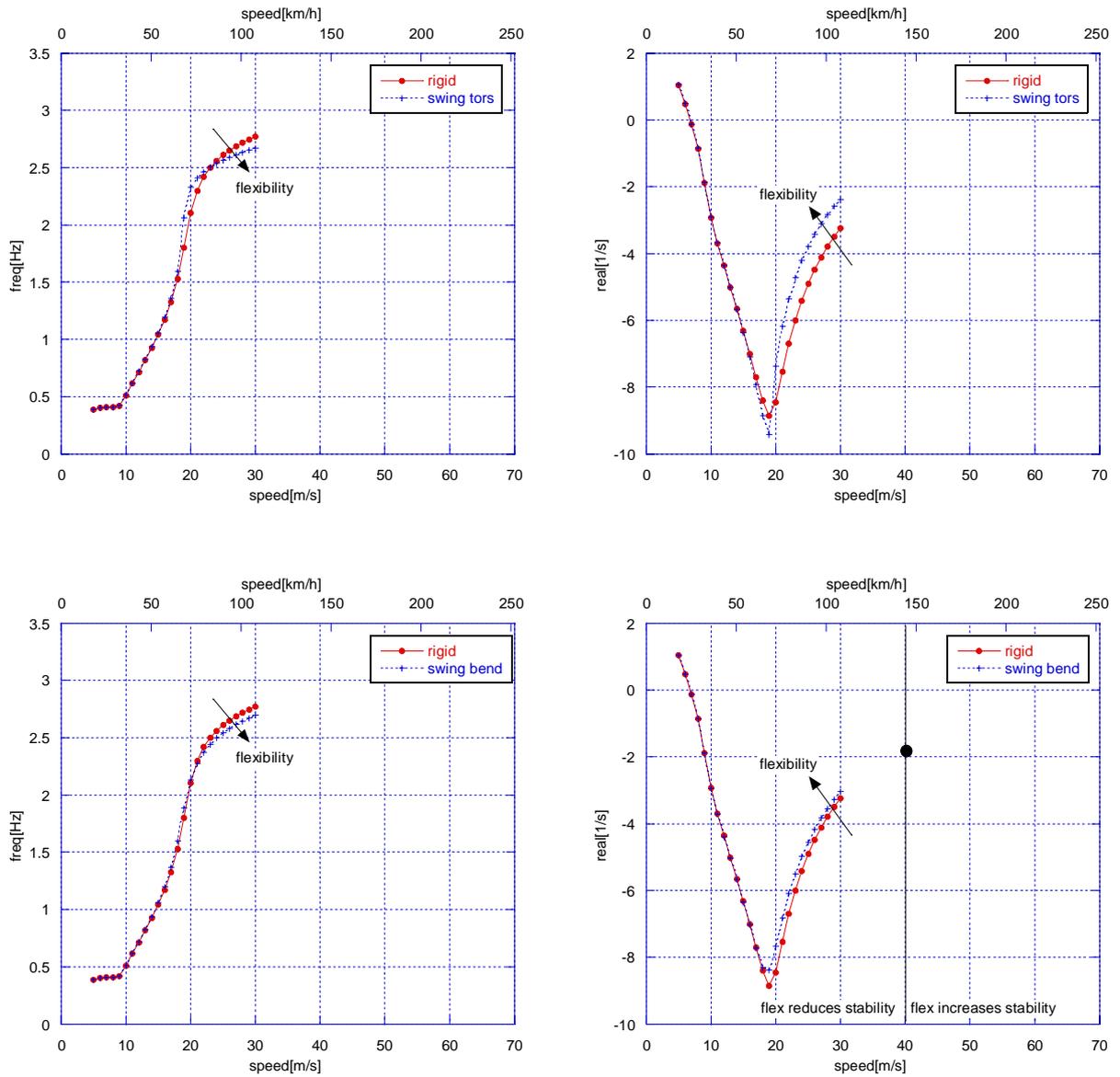


Figura 35 - Effetto della flessibilità posteriore sul modo weave, scooter

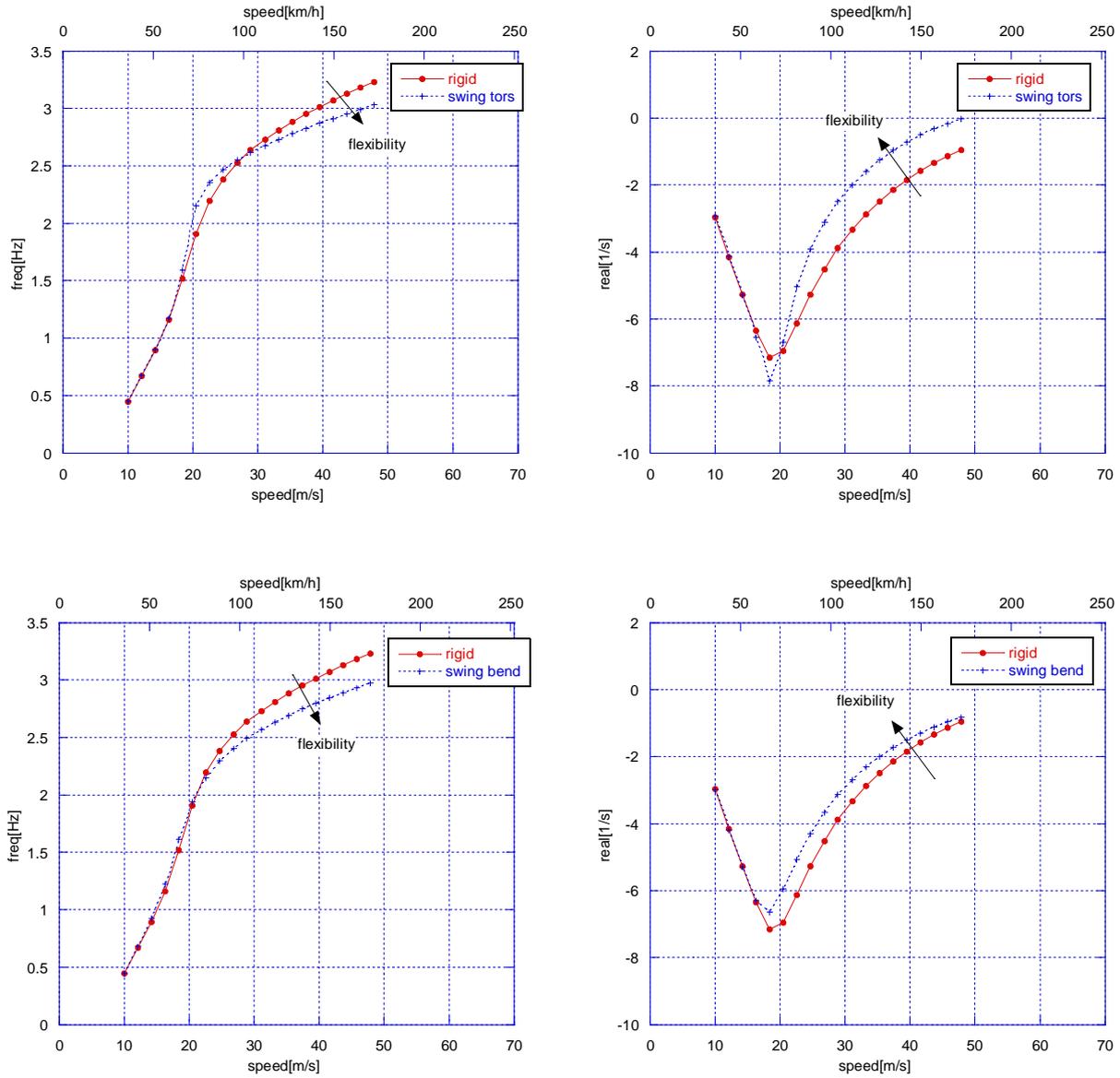


Figura 36 - Effetto della flessibilità posteriore sul modo weave, moto touring

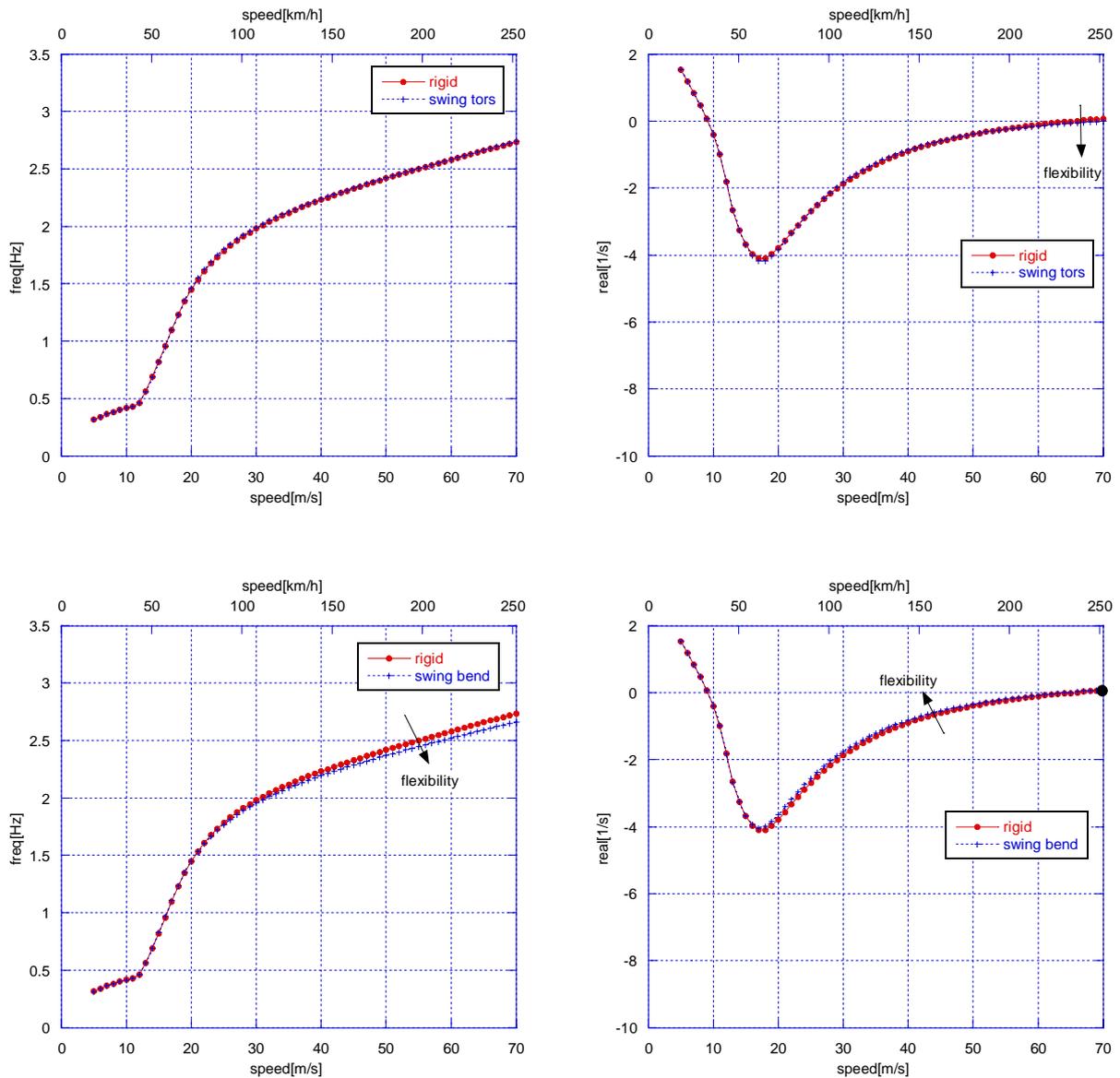


Figura 37 - Effetto della flessibilità posteriore sul modo weave, moto sportiva

Infine viene presentato l'effetto della flessibilità concentrata sull'asse della ruota per la moto touring: di fatto questa flessibilità tiene conto della flessibilità del cerchione. Gli effetti sono piccoli, ma mentre la flessibilità anteriore riduce la stabilità del weave (Figura 39, stesso effetto della flessibilità di torsione tra avantreno e telaio e della flessione laterale dell'avantreno), la flessibilità del cerchione posteriore aumenta la stabilità (Figura 37, al contrario della flessibilità del forcellone oscillante). Il risultato potrebbe sorprendere, ma è in accordo con le evidenze sperimentali di [26], in cui viene sottolineata l'importanza del rapporto tra spostamento laterale e rotazione sul punto di contatto posteriore: è evidente che la flessibilità sul perno ruota ha un rapporto rotazione/deformazione laterale molto più grande della flessibilità del forcellone posteriore.

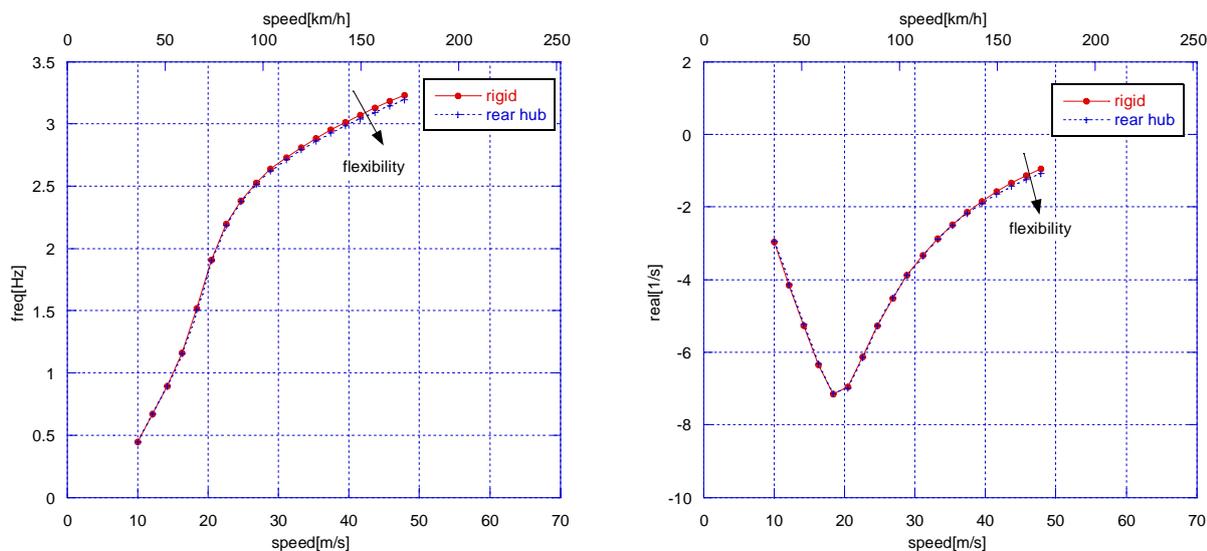


Figura 38 - Effetto della flessibilità del cerchione posteriore, moto touring

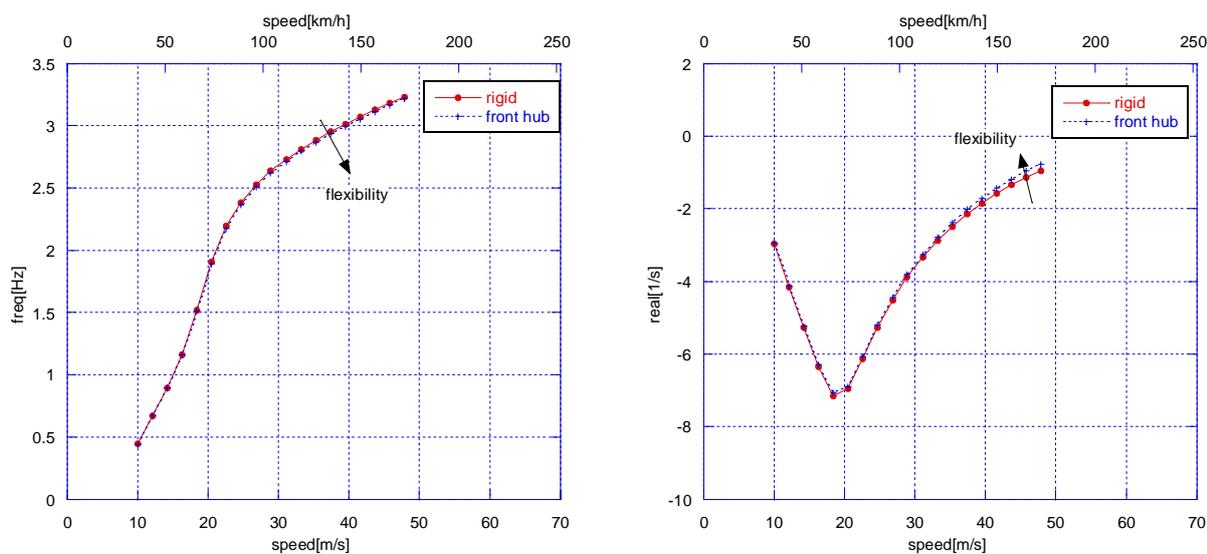


Figura 39 - Effetto della flessibilità del cerchione anteriore, moto touring

2.4 Chatter

Per chatter si intende un fenomeno vibratorio che consiste in oscillazioni delle masse non sospese nel piano di simmetria del veicolo con frequenze di circa 17-20 Hz. Questo fenomeno appare quasi esclusivamente nelle moto da competizione, in alcuni tracciati e in particolari manovre. Ci sono diverse interpretazioni del fenomeno e molte soluzioni empiriche. La bibliografia a riguardo è scarsa (per una discussione si veda [47]). Il codice *FastBike* consente di

evidenziare questo fenomeno sia nelle simulazioni nel dominio del tempo che nell'analisi di stabilità del sistema tramite autovalori.

Innanzitutto va sottolineato che è essenziale una qualche modellazione della flessibilità del sistema di trasmissione (§1.5) per evidenziare il fenomeno. In Figura 40 è riportato il luogo delle radici di una motocicletta GP125cc per velocità da 25 a 50 m/s, in rettilineo. Sono evidenti i modi fuori del piano wobble e weave, e i classici modi nel piano *pitch*, *bounce*, *rear* e *front hop*. E' anche presente un nuovo modo di vibrare, legato all'introduzione della flessibilità del sistema di trasmissione, che è stato infatti chiamato modo *transmission*. In Figura 41 sono rappresentati le componenti modali in termini di forza dei tre modi legati al fenomeno del chatter, *rear hop*, *front hop*, *transmission*. In particolare *Chain* rappresenta le fluttuazioni della forza sulla catena, *R.Susp* e *F.Susp* le fluttuazioni delle forze sulla sospensione posteriore e anteriore, *R.Long* e *F.Long* le fluttuazioni sulle forze longitudinali del pneumatico posteriore e anteriore, *R.Vert* e *F.Vert* le fluttuazioni sulle forze verticali del pneumatico posteriore e anteriore. Il modo *rear hop* coinvolge principalmente il retrotreno, il modo *front hop* principalmente l'avantreno, il modo *transmission* principalmente le vibrazioni della trasmissione. Comunque tutti e tre i modi risultano particolarmente accoppiati e simili in frequenza e smorzamento.

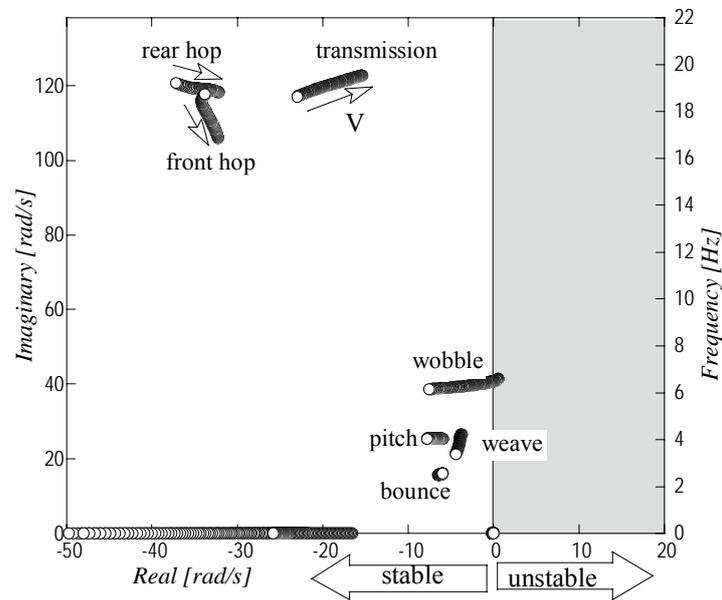


Figura 40 - Luogo delle radici, motocicletta GP125, velocità=25-50 m/s

Quando si calcola la stabilità del sistema in condizioni di decelerazione costante il modo *transmission* può diventare instabile. In Figura 42 sono riportate frequenza e parte reale dei tre modi attorno a 18-20 Hz in funzione della velocità di avanzamento, a decelerazione costante pari a 5.7 m/s^2 e per quattro diverse strategie di frenata: a) solo freno posteriore, b) solo freno-motore, c) solo freno anteriore, d) 50% freno anteriore e 50% freno-motore. Viene anche riportata la frequenza della ruota posteriore, in quanto essa può costituire una forzante del sistema in presenza di sbilanciamenti statici non trascurabili. L'eventuale risonanza si verifica tra i 35 e i 40 m/s (126-144 km/h). La Figura 42 evidenzia come il veicolo analizzato presenti un'instabilità del modo *transmission* con tutte le strategie di frenata tranne quando si usa esclusivamente il freno anteriore. Questa prima analisi in frequenza evidenzia come l'instabilità del modo *transmission* possa essere correlata all'instabilità nota come chatter. L'analisi della forma del modo di vibrare in frenata evidenzia inoltre una significativa fluttuazione del carico normale sulla ruota posteriore, cioè la possibilità di "saltellamenti".

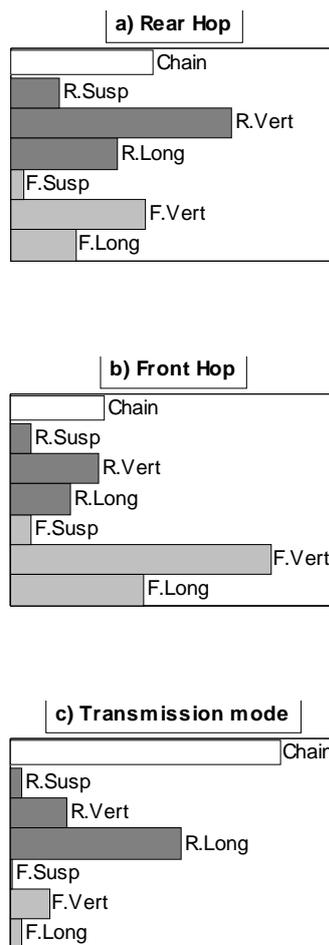


Figura 41 - Componenti modali dei modi *rear hop*, *front hop* e *transmission* in termini di forze, a 35 m/s e con accelerazione longitudinale nulla.

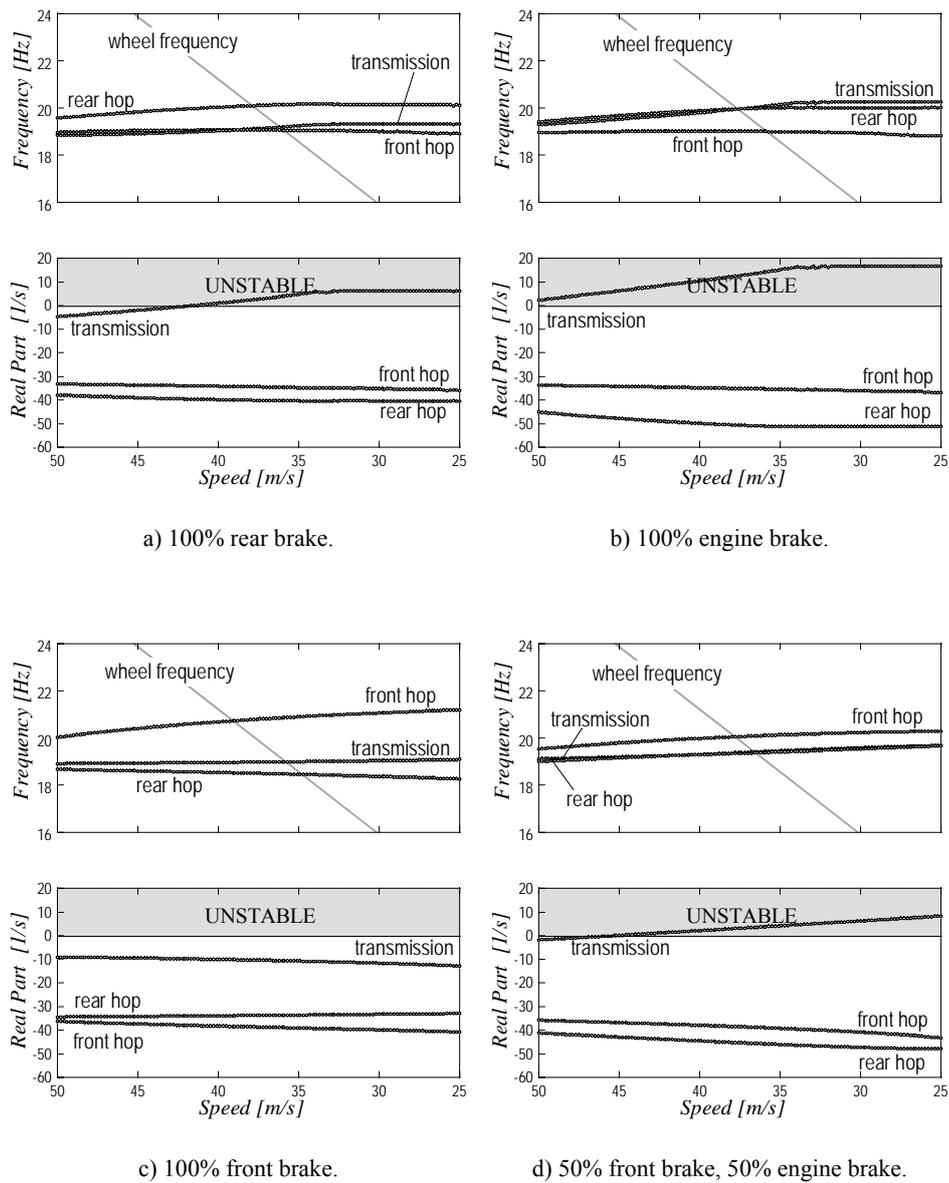


Figura 42 - Autovalori per velocità da 50 a 25 m/s e decelerazione pari a 5.7 m/s^2

Sono state eseguite delle simulazioni nel dominio del tempo in modo da verificare con il modello non-lineare le previsioni fatte mediante il calcolo degli autovalori che implica la linearizzazione del modello non-lineare attorno alla posizione di equilibrio.

La Figura 43 presenta una manovra di frenata in rettilineo da 50 a 25 m/s con decelerazione di 5.7 m/s^2 utilizzando per il 50% il freno anteriore e per il 50% il freno motore. In Figura 43a è evidente il fenomeno del chatter: a 37 m/s comincia una vibrazione delle masse non sospese che raggiunge accelerazioni di 5 g per l'anteriore e 20 g per il posteriore. Il fenomeno è prima visibile sulla ruota posteriore, poi anche sull'anteriore. Da sottolineare che la vibrazione del posteriore è sempre maggiore di quella sull'anteriore, Figura 43b, a conferma dei risultati del

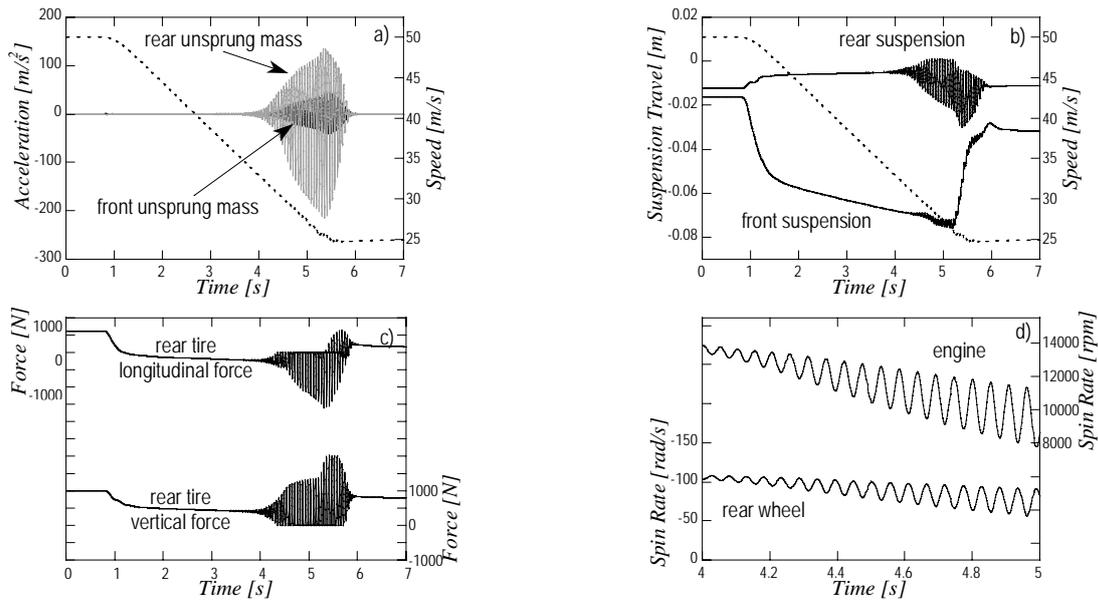


Figura 43 - Simulazione di frenata da 50 a 25 m/s con decelerazione di 5.7 m/s^2 (50% freno anteriore e 50% freno-motore)

modello linearizzato. La Figura 43c evidenzia una vibrazione attorno a 19 Hz, in accordo con l'analisi agli autovalori, ed evidenzia come il carico normale sulla ruota posteriore vada a zero, cioè la ruota saltella quando il fenomeno è innescato. Infine la Figura 43d mostra come la fluttuazione della velocità angolare del motore sia in opposizione di fase rispetto alla fluttuazione della velocità angolare della ruota, a conferma dei risultati sperimentali [47].

Infine in Figura 44 la stessa manovra è eseguita utilizzando solo il freno anteriore: come previsto dall'analisi di stabilità il veicolo non ha alcun tipo di instabilità.

A conclusione dell'analisi va rimarcato che:

- nei circuiti la manovra di frenata inizia in rettilineo e si conclude in curva: il chatter non inizia istantaneamente e spesso è percepito (cioè ha un'ampiezza non trascurabile per il pilota) quando il veicolo è già in curva anche se il fenomeno può essere già cominciato in rettilineo;

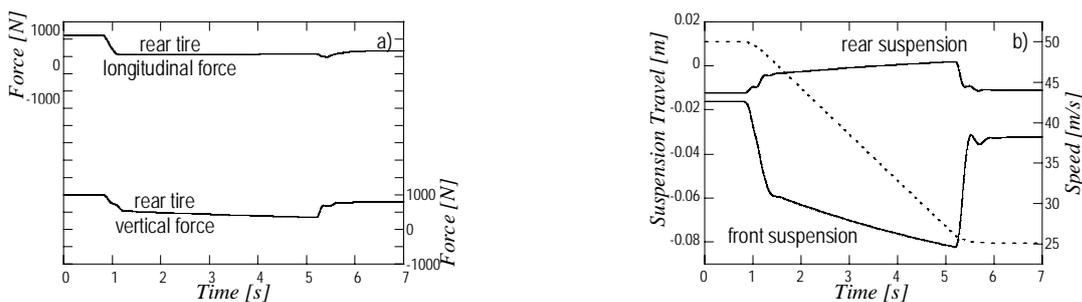


Figura 44 - Simulazione di frenata da 50 a 25 m/s con decelerazione di 5.7 m/s^2 (100% freno anteriore)

- le simulazioni utilizzano una strada perfettamente piatta, cioè il chatter può apparire senza alcuna eccitazione del terreno, anche se quest'ultima può certamente amplificare il fenomeno;
- il modello di veicolo ha delle ruote perfettamente bilanciate, cioè il chatter può apparire senza alcuno sbilanciamento, anche se un eventuale sbilanciamento può amplificare ulteriormente il fenomeno.

2.5 Kick-back

Per kick-back si intende un fenomeno che riguarda la stabilità del motociclo ad alta velocità (>100 km/h) anche se talvolta può apparire anche a velocità minori. E' solitamente innescato dal sollevamento della ruota anteriore dovuto alle ondulazioni della strada e/o ad una brusca accelerazione. Il pilota reagisce istintivamente con un impulso sul manubrio che porta ad una leggera rotazione dello sterzo. Quando la ruota anteriore ritorna in contatto con la strada, l'avantreno non si trova in posizione di equilibrio, e si genera dunque una forza impulsiva sul pneumatico che ruota violentemente il manubrio (kick-back o sbacchettamento). Il fenomeno può essere tanto intenso da far perder il controllo del veicolo, e si verifica sia in rettilineo che in curva.

Verranno presentati i risultati delle simulazioni di kick-back in curva (rollio=25° a sinistra) per una moto enduro a 20 m/s. Il fenomeno è innescato da un'ondulazione del terreno (altezza 30 mm, lunghezza 600 mm) inclinata di 30° rispetto alla perpendicolare alla linea di mezzzeria della strada (Figura 45, destra). E' possibile simulare tali condizioni grazie al modello di interazione pneumatico-strada descritto in §1.4. E' importante sottolineare la strategia utilizzata per il controllo del veicolo: il motociclo viene portato dalla configurazione di moto rettilineo a quella rollata per mezzo di un controllore PID agente sulla coppia di sterzo (§1.9). Una volta raggiunte le condizioni di regime il controllore viene disabilitato, in modo da non avere le armoniche del controllore nella risposta del sistema dopo l'attraversamento dell'ostacolo, e la coppia di sterzo viene mantenuta al valore di regime. Le simulazioni hanno mostrato che questa strategia porta a risultati più simili ai riscontri sperimentali rispetto ai risultati ottenuti mantenendo attivo il controllore PID per tutta la simulazione. Per la discussione di risultati sperimentali in condizioni simili a quelle simulate si veda [48].

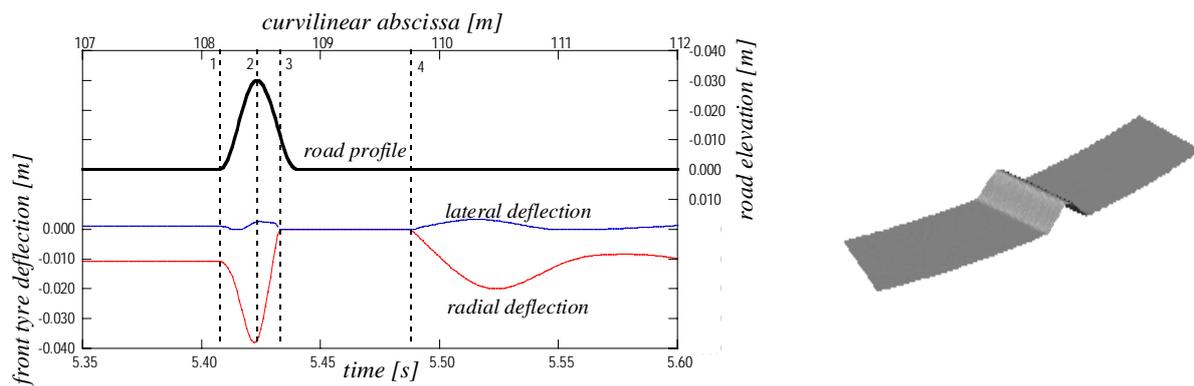


Figura 45 - Deformazione radiale e laterale del pneumatico e profilo stradale

Le simulazioni numeriche consentono di analizzare la deformazione del pneumatico della ruota anteriore durante l'attraversamento dell'ostacolo, Figura 45. Quando il veicolo entra in contatto con l'ostacolo (punto 1) è presente una deformazione radiale di 10 mm e laterale di 1 mm legate alla condizione di equilibrio in curva. Il picco delle forze di contatto porta ad una deformazione radiale di 38 mm (punto 2), mentre la deformazione radiale non cambia molto. Al punto 3 sia la deformazione radiale che laterale sono nulle, cioè la ruota anteriore non è più in contatto con il terreno. Dopo un salto di circa 1 m la ruota ritorna in contatto con il terreno nel punto 4. In seguito ci sono alcune oscillazioni fino a che la configurazione ritorna quella del punto 1.

E' anche possibile analizzare la traiettoria del punto di contatto sulla carcassa del pneumatico: In Figura 46 (a: vista laterale, b: vista dal basso) Y_W è l'asse di rotazione della ruota, X_W è perpendicolare a Y_W e non ha componenti lungo la direzione verticale, Z_W è normale a X_W e Y_W . Quando il veicolo è in rettilineo il punto di contatto è individuato dal punto 0: l'unica deformazione è quella in direzione radiale (Figura 46a) e il punto di contatto è al centro della carcassa (Figura 46b). Quando il veicolo entra in curva il punto di contatto si muove sia radialmente (a) che lateralmente (b) nella posizione individuata dal punto 1. Lo spostamento laterale è dovuto sia alla forma toroidale della carcassa che alla deformazione dovuta alla rigidità del pneumatico. Quando il veicolo entra in contatto con l'ostacolo (punto 1-2) il punto di contatto si muove soprattutto in avanti e in alto. Sul picco dell'ostacolo (punto 2) la configurazione è molto simile a quella iniziale (posizione 1) da cui differisce per la maggiore compressione radiale. Come in Figura 45, anche in Figura 46 il punto 3 coincide con la perdita di contatto con il terreno. Il punto di contatto è arretrato poichè la ruota è nella parte discendente dell'ostacolo. Al punto 4 il pneumatico torna in contatto con il terreno: segue un picco sulla

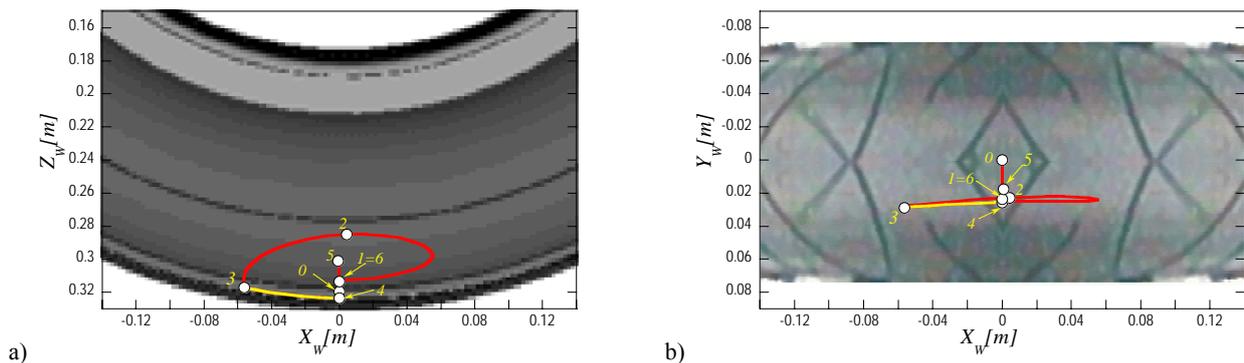


Figura 46 - Traiettoria del punto di contatto sulla carcassa del pneumatico

deformazione laterale (punto 5) e una serie di oscillazioni, alla fine delle quali la configurazione torna ad essere prossima a quella iniziale (punto 6=punto 1).

Cosa succede durante un kick-back? La Figura 47 fornisce un'interpretazione. Quando il veicolo entra in contatto con l'ostacolo si verificano dei picchi sia nella forza laterale che in quella verticale del pneumatico (Figura 47b): come conseguenza si osserva una compressione della sospensione anteriore (Figura 47c). E' interessante osservare che il picco della corsa della sospensione si verifica quando il carico verticale è nullo. Il secondo effetto dei picchi sulle forze di contatto è di ruotare il manubrio verso l'esterno (primo picco in Figura 47a), cioè si riduce in valore assoluto il valore dell'angolo di sterzo. Quando il veicolo perde il contatto con il terreno il pilota ruota il manubrio verso l'interno della curva (secondo picco Figura 47a), e dunque quando la ruota ritorna in contatto con il terreno le forze agenti sull'avantreno non sono in equilibrio, e generano una risultante che "calcia" lo sterzo verso l'esterno (terzo picco Figura 47a). La massima accelerazione di 1.5 g, misurata sul parte posteriore del telaio in prossimità del codone si verifica dopo il salto del veicolo, nel piano verticale del veicolo (Figura 47d).

Infine la Figura 48 e la Figura 49 mostrano l'effetto delle caratteristiche dei pneumatici e dell'ammortizzatore di sterzo sulle vibrazioni originate dal kick-back, cioè dei parametri che sono solitamente presi in considerazione per attenuare il fenomeno. In Figura 48a) e b) la linea grossa rappresenta la configurazione di riferimento, la linea tratteggiata la simulazione con una rigidità di deriva ridotta del 20%, la linea continua sottile la simulazione con una rigidità di deriva aumentata del 20%. In Figura 48c) e d) la linea grossa rappresenta ancora la configurazione di riferimento, la linea tratteggiata la simulazione con la rigidità strutturale della carcassa ridotta del 20%, la linea continua sottile la simulazione con la rigidità aumentata del 20%. I parametri influenzano soprattutto l'entità del secondo e del terzo picco, e gli effetti del pneumatico anteriore sono decisamente più influenti di quelli del pneumatico posteriore. La

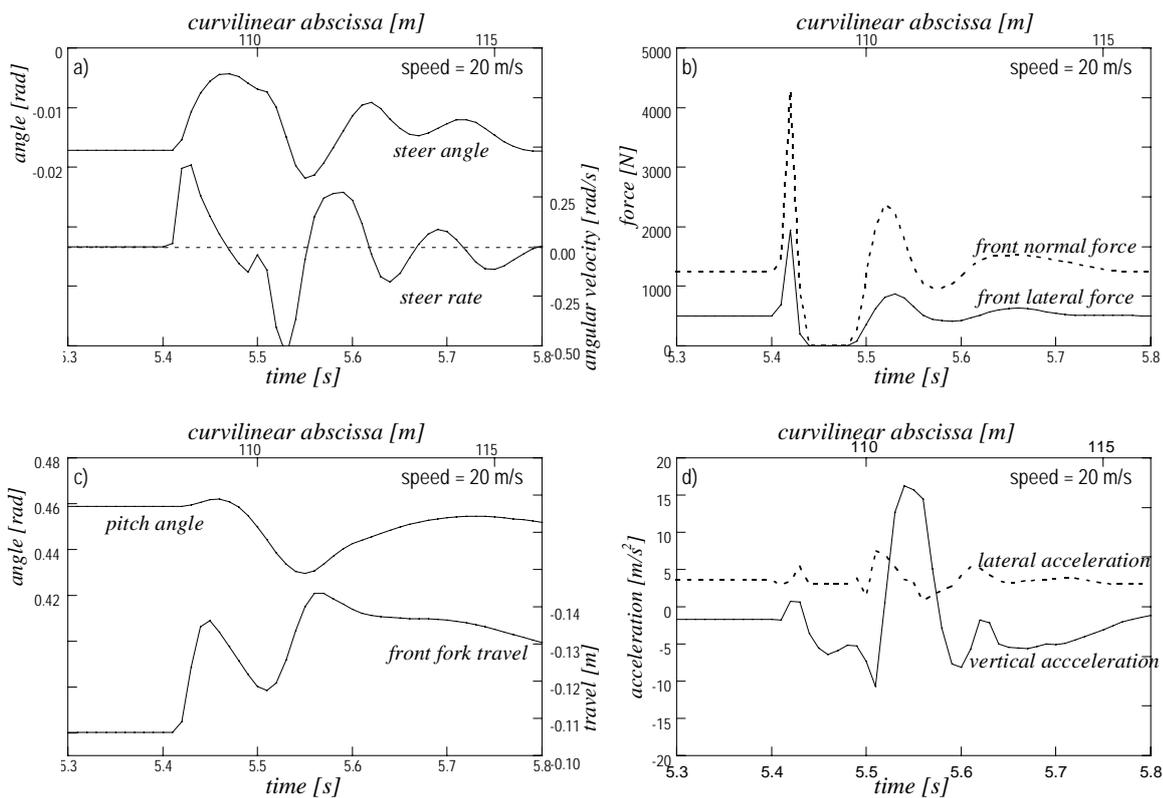


Figura 47 - Simulazioni numeriche di kick-back, $v=20$ m/s

migliore soluzione per il veicolo considerato consiste nell'utilizzare una rigidità di deriva ridotta (Figura 48a) e una maggiore rigidità strutturale (Figura 48c): il risultato è avere una lunghezza di rilassamento ridotta, cioè un minore ritardo delle forze del pneumatico.

In Figura 49 la linea grossa rappresenta la configurazione di riferimento, la linea tratteggiata la simulazione con un coefficiente di smorzamento dell'ammortizzatore di sterzo ridotto del 20%, la linea continua sottile la simulazione con un coefficiente aumentato del 20%. Come prevedibile la soluzione più stabile è quella con lo smorzamento massimo. Ancora l'effetto è predominante sul secondo e sul terzo picco.

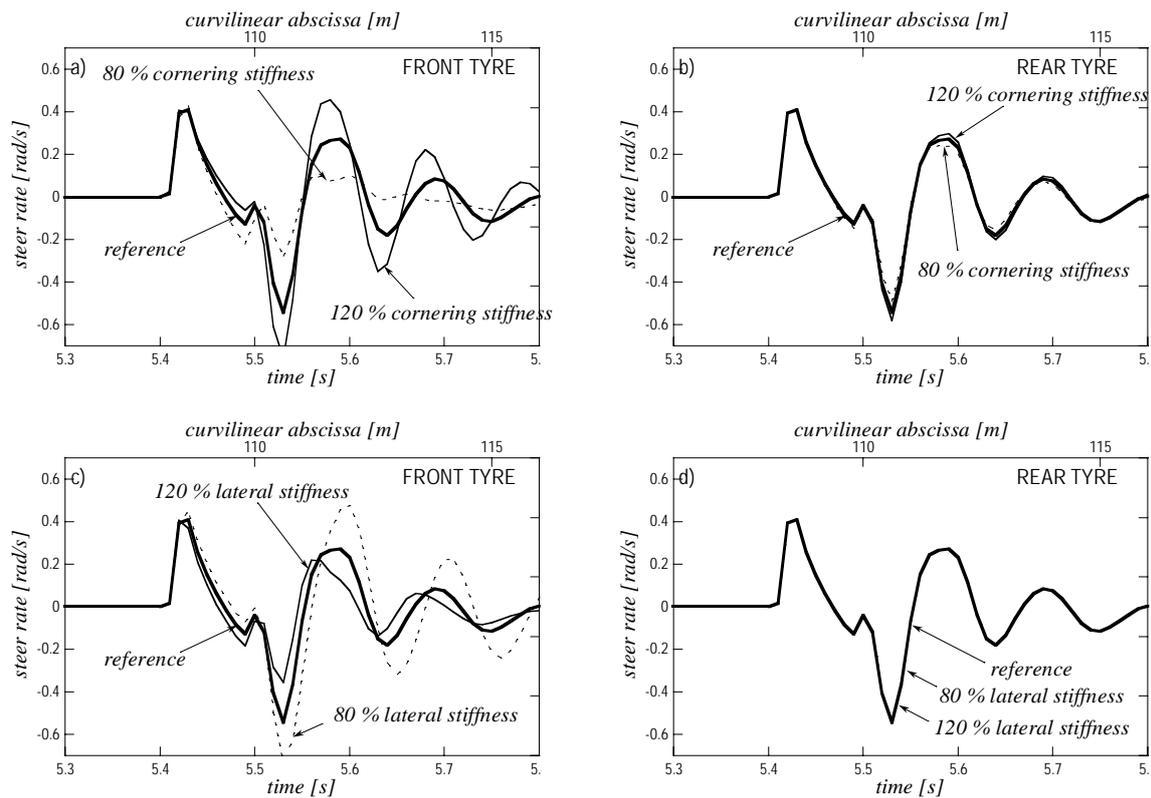


Figura 48 - Effetto delle rigidità del pneumatico sulle oscillazioni di kick-back, $v=20$ m/s

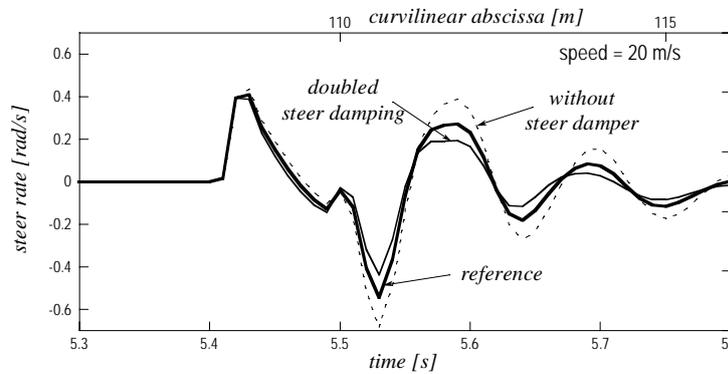


Figura 49 - Effetto dell'ammortizzatore di sterzo sulle oscillazioni di kick-back, $v=20$ m/s

2.6 Impedenza del pilota

In questa sezione verrà dapprima utilizzato un modello semplificato (tipo Sharp71, [18]) per presentare il solo effetto dovuto all'impedenza del pilota sulla stabilità del veicolo, infine verrà discusso il luogo delle radici del codice *FastBike* con il modello completo di pilota *sospeso* sul telaio e *appeso* al manubrio. Per la determinazione dei valori delle rigidità e degli smorzamenti del modello di pilota vengono utilizzati i parametri di un *pilota medio* identificato secondo i criteri di §1.6.

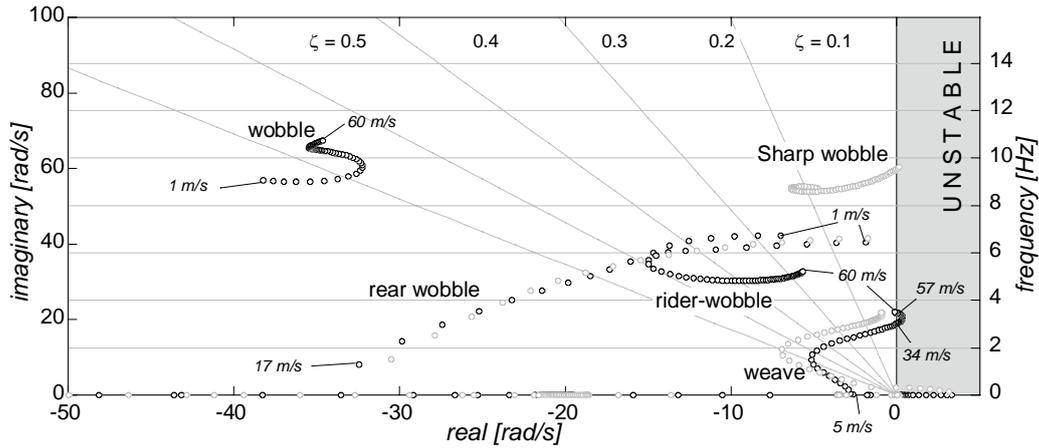


Figura 50 - Luogo delle radici: effetto dell'impedenza del pilota

In Figura 50 è riportato il confronto tra i poli del modello di Sharp71 con (pallini neri) e senza (pallini grigi) l'effetto l'impedenza del pilota. Il modo weave, prima sempre stabile oltre i 6-7 m/s, diventa instabile tra 34 e 57 m/s dopo l'introduzione dell'impedenza del pilota. Inoltre il weave non è più oscillante tra 1 e 4 m/s. L'analisi degli autovettori (Figura 51, Figura 52) evidenzia come la componente di imbardata del pilota θ_t sia in ritardo di circa 10° rispetto all'angolo di sterzo δ . Al solito si trova che ad alta velocità l'angolo di rollio ϕ è in ritardo di circa 110° rispetto allo sterzo, come evidenziato sperimentalmente fin dal 1973 [61].

Da osservare che nel modello non sono utilizzate nè la posizione laterale y nè l'imbardata ψ come variabili di stato (sono ignorabili), ma v e ψ_{dot} , velocità laterale della terna mobile e velocità di imbardata. Lo spostamento y e l'imbardata sono ottenuti come segue

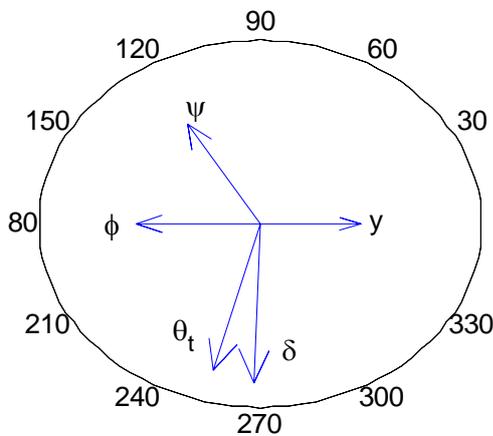


Figura 51 - Modo weave stabile
 ($v=30$ m/s, $f=2.89$ Hz)

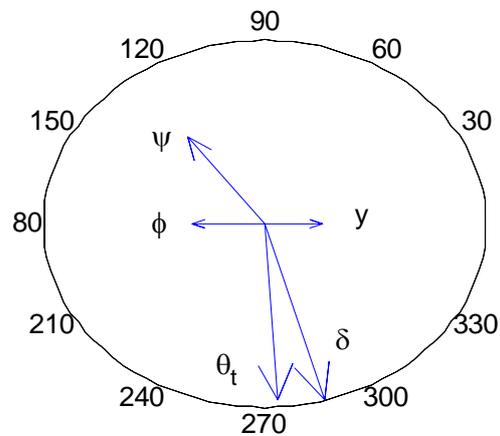


Figura 52 - Modo weave instabile
 ($v=50$ m/s, $f=3.37$ Hz)

$$\psi = \frac{\Psi_{dot}}{s}, y = \frac{V\psi + v}{s} \quad ^1$$

con V velocità di avanzamento del veicolo e s variabile di Laplace.

Il modo capsize, prima stabile fino a 10 m/s, diventa ora leggermente sempre instabile. Il wobble risulta fortemente stabilizzato, il rapporto di smorzamento ζ sale da 0-0.1 a circa 0.5, mentre la frequenza rimane praticamente costante. L'autovettore (Figura 53, Figura 54) evidenzia come la componente predominante sia l'oscillazione dello sterzo, mentre l'imbardata del pilota sia quasi in opposizione di fase.

Compare infine un nuovo modo di vibrare (dovuto alla presenza del nuovo grado di libertà), qui chiamato *rider-wobble*. Ancora le principali componenti (Figura 55, Figura 56) sono l'imbardata del pilota e l'oscillazione dello sterzo, questa volta più in fase (ritardi di 10-30°). La frequenza di questo modo è prossima a quella calcolabile tramite (4) in §1.6. Da notare che il wobble e il rider-wobble includono sostanzialmente solo i due gradi di libertà δ, θ_t , e in accordo con l'analisi dei sistemi a 2 gradi di libertà, danno luogo a 2 modi di vibrare, uno con i gradi di libertà in fase (bassa frequenza, rider-wobble) e l'altro in opposizione (alta frequenza, wobble).

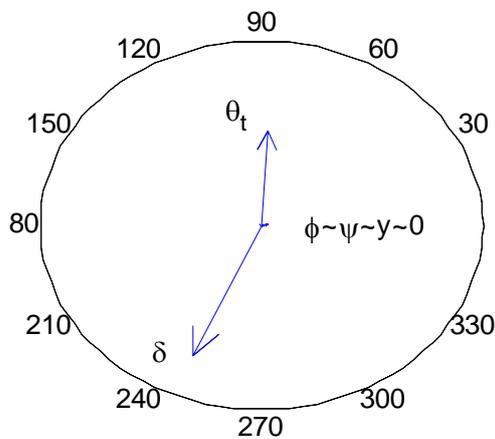


Figura 53 - Modo wobble
($v=1$ m/s, $f=9.06$ Hz)

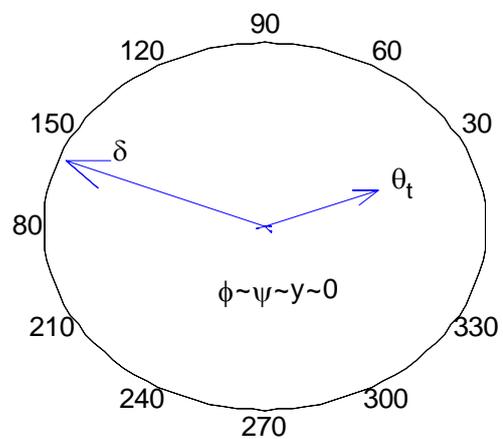


Figura 54 - Modo wobble
($v=60$ m/s, $f=10.75$ Hz)

¹ dalla linearizzazione ($\psi \ll 1$) di $y' = V \sin(\psi) + v \cos(\psi)$

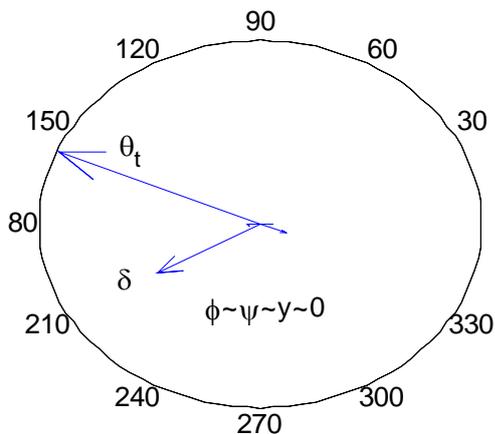


Figura 55 - Modo rider-wobble
 ($v=1$ m/s, $f=6.73$ Hz)

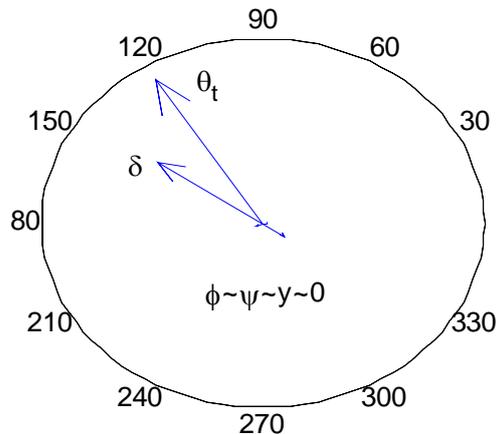


Figura 56 - Modo rider-wobble
 ($v=60$ m/s, $f=5.20$ Hz)

Si può sintetizzare che l'introduzione del rider porta ad una stabilizzazione del wobble (sia il wobble che il rider-wobble sono più smorzati del wobble originale) e ad una destabilizzazione del weave ad alta velocità. La stabilizzazione del wobble dovuta all'effetto delle mani del pilota è un fenomeno noto a livello sperimentale, mentre meno documentato è l'effetto dell'interazione pilota-manubrio sulla stabilità del modo weave ad alta velocità. I pochi dati sperimentali di cui si è in possesso confermano questo effetto. In un certo senso il rider è una specie di smorzatore di sterzo (§1.6), che notoriamente stabilizza il wobble ed ha un effetto opposto sul weave, con la differenza che la caratteristica del pilota non è un parametro a disposizione del progettista.

Viene infine presentato un esempio di luogo delle radici del codice *FastBike* con il modello di rider completo, Figura 57. Le frequenze naturali e gli smorzamenti utilizzati sono riportati in Tabella 8: le prime due righe sono state derivate da [27] mentre le ultime due derivano da misure effettuate presso l'MDRG. E' evidente che note le caratteristiche di Tabella 8 e le caratteristiche inerziali del corpo del pilota, è possibile calcolare le rigidezze e gli smorzamenti del modello. Va ricordato che nel modello l'asse di rollio della parte superiore del busto del pilota rispetto all'inferiore è perfettamente orizzontale e passa in prossimità del piano della sella del veicolo, mentre l'asse di imbardata della parte superiore del busto del pilota rispetto all'inferiore è perfettamente verticale e passa in prossimità del baricentro della parte superiore del corpo del pilota. L'introduzione del rollio del pilota conduce alla divisione in due parti della curva del modo weave (si veda anche [14]), mentre l'introduzione dello spostamento laterale aggiunge un modo di vibrare (*rider-lateral*, talvolta detto anche *rider-shake*) al luogo delle radici. L'imbardata del pilota e il collegamento del busto con il manubrio per mezzo di un sistema

molla-smorzatore porta alla divisione del wobble in due modi: il wobble, con lo sterzo del veicolo e l'imbardata del pilota (quasi) in opposizione di fase, e il rider-wobble, con lo sterzo e l'imbardata (quasi) in fase. Entrambi questi ultimi due modi sono particolarmente stabili, a conferma della stabilità delle vibrazioni di tipo wobble quando le mani sono appoggiate sul manubrio.

Tabella 8 - Caratteristiche del pilota

	f_n [Hz]	ζ
movimento laterale di tutto il corpo del pilota rispetto al telaio	3.75	0.20
rollio della parte superiore del corpo del pilota rispetto all'inferiore	1.15	0.45
imbardata della parte superiore del corpo del pilota rispetto all'inferiore	1.73	0.34
imbardata della parte superiore del corpo del pilota rispetto al manubrio	6.44	0.37

Infine la Figura 58 rappresenta il luogo delle radici dello stesso veicolo, ma con i parametri di pilota usati in [8] che rappresenta l'unico lavoro in letteratura a conoscenza dell'autore che considera l'impedenza del pilota nell'analisi della stabilità. Il modello di pilota è molto simile, ed è provvisto di un sistema molla-smorzatore per il collegamento della parte superiore del corpo del pilota con il manubrio ed uno per il collegamento con il telaio. Le rigidezze e gli smorzamenti sono derivati da [34]: $k=60$ Nm/rad (120 Nm/rad) e $c=13.5$ Nms/rad (13.5 Nms/rad) per l'imbardata della parte superiore del corpo del pilota rispetto all'inferiore e $k=3.2$

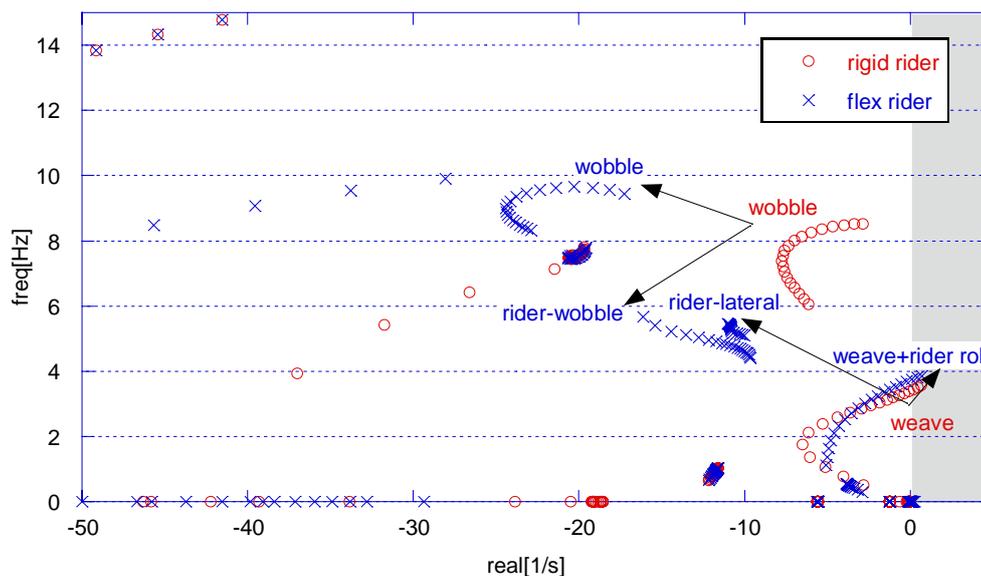


Figura 57 - Luogo delle radici, modello di pilota completo *FastBike*

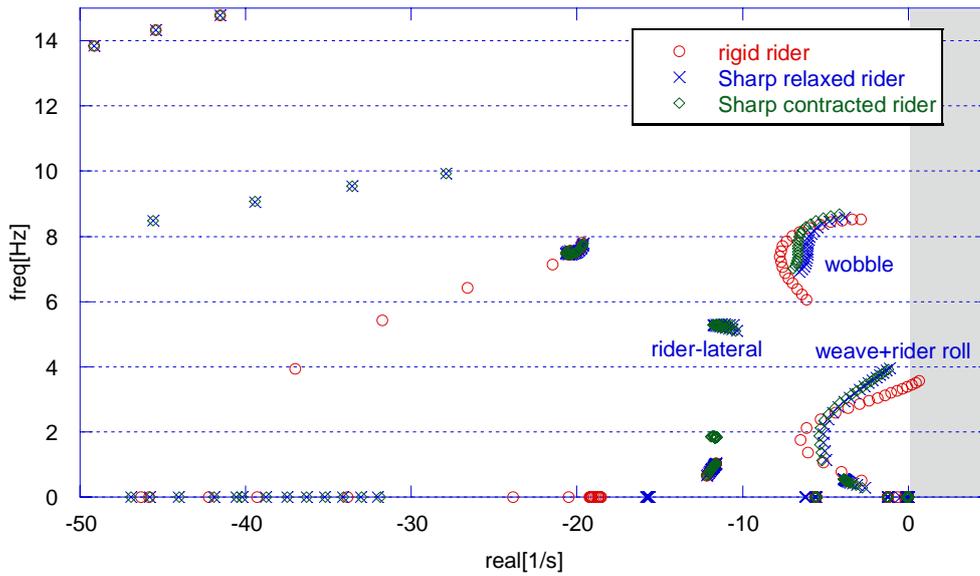


Figura 58 - Luogo delle radici, modello di pilota *FastBike*, parametri del pilota Sharp

Nm/rad (60 Nm/rad) e $c=0.72$ Nms/rad (1.8 Nms/rad) per l'imbardata della parte superiore del busto del pilota rispetto al manubrio. Tra parentesi sono riportati i valori nel caso di pilota contratto e non rilassato.

Le differenze tra la Figura 57 (MDRG) e la Figura 58 (Sharp2004, [8]) sono notevoli. Il modo wobble viene solo leggermente stabilizzato con i parametri di Sharp (sia in configurazione rilassata che tesa), mentre viene notevolmente stabilizzato con i parametri MDRG. Il modo weave è molto più stabile con i parametri di Sharp rispetto ai parametri MDRG. Di fatto con i parametri di Sharp l'effetto sul weave è praticamente trascurabile, e la stabilizzazione rispetto al modello rigido è legata al modo di rollio del busto del pilota. Al contrario con i parametri MDRG l'effetto delle mani sul manubrio è molto destabilizzante, ed è in grado di compensare l'effetto stabilizzante legato al rollio del busto del conducente.

Capitolo 3: sulla modellazione delle flessibilità strutturali

I valori e le posizioni delle rigidezze utilizzate per le simulazioni sono solitamente ottenuti sperimentalmente mediante applicazione di forze al centro dell'impronta del pneumatico con il terreno oppure mediante applicazione di forze e/o momenti sui singoli componenti. Nel primo caso il telaio può essere fissato al riferimento assoluto in prossimità del motore o in prossimità delle piastre dello sterzo [11]. Nota la forza applicata e misurati gli spostamenti e le rotazioni è possibile calcolare le rigidezze strutturali del veicolo. La flessibilità della carcassa del pneumatico può anche essere misurata a parte in modo che sia poi possibile ottenere la sola rigidezza strutturale per differenza tra la rigidezza misurata e la rigidezza della carcassa.

Si ritiene che sia garantita con ottima approssimazione la congruenza statica tra il sistema multi-body e il sistema reale quando si applicano le forze sul punto di contatto e si identificano gli assi di deformazione e le rigidezze del sistema attorno a tali assi. Per congruenza statica tra i due sistemi all'applicazione delle forze (**SCF**) si intende che all'applicazione della stessa forza corrisponde lo stesso spostamento e la stessa rotazione del punto dove la forza è applicata, cioè il punto di contatto. In altre parole entrambi i sistemi (quello reale e il modello multi-body) ruotano attorno allo stesso asse di deformazione statico (**STA**), ed hanno la stessa rigidezza rispetto a tale asse. Il sistema fisico reale si dimostra solitamente lineare per piccole deformazioni, ed è quindi possibile utilizzare un valore della rigidezza costante nel modello. Va sottolineato che, una volta assicurata la SCF, non vi è alcuna garanzia di congruenza statica all'applicazione di una coppia e di congruenza dinamica. Per congruenza statica all'applicazione della coppia (**SCT**) si intende che entrambi i sistemi (reale e multi-body) hanno la stessa deformazione e la stessa rotazione sul punto di contatto quando viene applicata la stessa coppia sul punto di contatto, mentre per congruenza dinamica (**DC**) si intende la coincidenza della frequenza naturale e la stessa forma del modo di vibrare al punto di contatto, cioè lo stesso asse di deformazione dinamico (**DTA**). Si è particolarmente interessati alla cinematica nella zona di contatto in quanto essa governa la generazione delle forze del pneumatico. In prima approssimazione si può trascurare la SCT, in quanto i momenti generati nella zona di contatto sono dovuti all'avancorsa del pneumatico e alla migrazione del punto di contatto sulla carcassa, e il loro contributo è dunque di gran lunga inferiore a quello delle forze. La congruenza dinamica, e in particolare la posizione dell'asse di deformazione dinamico rispetto a quello statico, rimane ancora un problema aperto. L'unico lavoro a conoscenza dell'autore è [9]: l'analisi statica e dinamica dell'avantreno della motocicletta utilizzata evidenziavano un'asse di deformazione dinamico leggermente al di sopra delle piastre dello sterzo, ed un asse di deformazione statico al di sotto. La prima frequenza

strutturale flessionale della forcella era circa 12 Hz. La risposta statica e dinamica del sistema si prestavano entrambe ad un'identificazione mediante modelli ad 1 gdl, ma sfortunatamente i due modelli avevano valore e posizione della rigidità diversi. Gli autori dichiaravano singolare il comportamento. Nei modelli più avanzati e recenti, l'unica flessibilità concentrata dell'avantreno è posta in prossimità della piastra dello sterzo ([25],[39],[40]). Nessuno degli autori fornisce particolari dettagli sull'eventuale identificazione delle rigidità. In particolare si dichiara ancora oggetto di ricerca la modellazione a parametri concentrati della flessibilità distribuita del veicolo in [8].

Nelle ultime decadi sono stati sviluppati diversi metodi per condensare (o sintetizzare) le proprietà di un modello agli elementi finiti in un codice multi-body [62], alcuni dei quali sono disponibili in codici commerciali. A parità di condensazione (cioè a parità di numero gradi di libertà trascurati) i risultati dipendono fortemente dalla posizione e dal tipo dei gradi di libertà utilizzati. Ci sono tre metodi classici di condensazione. Il primo è la condensazione statica (o di Guyan [63]) che consente di ottenere una matrice di rigidità di dimensioni ridotte ma esatta (rispetto al modello FEM) e una matrice di massa approssimata: i modi di vibrare del sistema ridotto sono dunque diversi da quelli del sistema FEM completo. Il metodo di Hurty [64] e il metodo di Craig-Bampton [65] che consentono di ottenere matrici di rigidità e di massa approssimate che permettono un calcolo dei modi di vibrare del sistema più preciso rispetto al metodo di Guyan; la matrice di rigidità ridotta tuttavia non è esatta. Sia MSC.Adams [66] che LMS.VirtualLab [67] consentono l'utilizzo di una condensazione tipo Craig-Bampton per l'importazione di elementi FEM.

La sezione 3.1 si propone di chiarire i concetti di SCF, SCT, DC, STA e DTA e propone una tecnica di condensazione a 2+1 gdl presentando l'esempio della modellazione a parametri concentrati di una trave incastrata con e senza massa all'estremità. La sezione 3.2 spiega l'applicazione generale dei concetti di 3.1 ai modelli FEM complessi.

3.1 Modelli a parametri concentrati per la trave incastrata

Una trave incastrata ad un'estremità con una massa e un'inerzia sull'altra estremità si può pensare come un modello semplice di avantreno (o anche di retrotreno) dove la trave rappresenta la forcella telescopica (o il forcellone oscillante), la massa e l'inerzia concentrate all'estremità rappresentano la ruota; l'asse della trave è allineato con l'asse di torsione della forcella (o del forcellone). L'esempio permette di chiarire alcuni aspetti molto interessanti alla base del problema dell'identificazione e la modellazione a rigidità concentrate. Va detto che il problema è legato principalmente alla modellazione della flessione (che coinvolge sia spostamenti che

rotazioni), mentre la torsione (solo rotazioni) e la deformazione assiale (solo spostamenti) sono più semplici. Va ricordato che nel caso della motocicletta si è particolarmente interessati alla cinematica del punto di contatto, cioè dell'estremità libera della mensola.

Siano E , J ed L il modulo di elasticità del materiale che costituisce la trave, il momento di inerzia della sezione e la lunghezza della trave. Se si applicano delle forze all'estremità e si misurano gli spostamenti e le rotazioni, si conclude che il sistema continuo può essere modellato con un sistema equivalente ad 1 gdl, con una rigidezza $K_I=4EJ/3L$ posta a $L_I=2L/3$ dal punto di applicazione della forza. Se invece si applicano delle coppie concentrate all'estremità si conclude che è necessario un sistema ad 1 gdl con $K_I=EJ/L$ e $L_I=L/2$. Se diversamente si eccita il sistema (senza alcuna massa all'estremità) in prossimità della sua prima frequenza naturale si conclude che il sistema è rappresentabile con $K_I=1.57EJ/L$ e $L_I=0.73L$. Nell'ultimo caso viene identificato sostanzialmente il primo modo di vibrare (flessionale) del sistema. La seconda frequenza naturale ω_2 della trave incastrata è piuttosto lontana dalla prima ($\omega_2=6.3\omega_1$, [68]). Nei primi due casi L_I identifica la posizione di STA, nell'ultimo caso DTA (del primo modo di vibrare). In particolare DTA è più lontano di STA dall'estremità della trave, e il sistema che identifica il primo modo di vibrare ha una rigidezza maggiore di quella dei sistemi che identificano le risposte statiche. In Tabella 9 sono riassunti i risultati del confronto tra i modelli ad 1 gdl e la trave continua, in particolare K_{lin} rappresenta la rigidezza lineare all'estremità della trave. Le masse vibranti sono quelle corrispondenti alla divisione della trave in due elementi lunghi rispettivamente L_I e $L-L_I$, cioè se $L_I=0.66L$, la massa vibrante sarà $0.66\rho AL$, dove ρ è la densità del materiale della trave e A è la sezione della trave. E' anche possibile scegliere la massa vibrante in modo da avere esattamente la stessa frequenza naturale del sistema continuo, ma rimane il problema della posizione dell'asse di DTA, cioè del rapporto tra deformazione e rotazione.

Tabella 9 – Differenze tra i modelli ad 1 gdl e la trave continua (w e θ sono lo spostamento e la rotazione all'estremo libero)

L_I/L	$K_I/(EJ/L)$	$K_{lin}/(EJ/L^3)$ equivalent	errors only Torque		errors only Force		errors 1 st mode	
			w/ $\theta \sim L_I/L$	$\theta \sim 1/K_I$	w/ $\theta \sim L_I/L$	w $\sim 1/K_{lin}$	fn	w/ θ
0.50	1.00	4.00	0	0	-24%	+33%	-25%	-32%
0.66	1.33	3.00	+32%	-25%	0	0	-8%	-10%
0.73	1.57	2.95	+50%	-36%	+10%	-15	0	0

Come secondo passo, consideriamo ora il caso della trave con una massa M_{add} ed un'inerzia J_{add} aggiunte all'estremità libera, in modo da avvicinarci al caso della forcella con la ruota

all'estremità (o al forcellone oscillante con la ruota all'estremità). Rispetto al modello precedente ci saranno delle differenze solo per quanto riguarda la risposta dinamica. Solitamente le caratteristiche modali della trave continua con massa all'estremità sono tabulate in funzione dei due parametri adimensionali km e kj , con $km=M_{add}/\rho AL$ e $kj=J_{add}/\rho AL^3$. Le frequenze naturali ω sono date in termini del parametro adimensionale β , con $\omega=\beta L^2$. Se $km=1$ (0.5, 2) e $kj=0.15^2$, cioè la massa della ruota è uguale (metà, doppia) a quella della forcella e il raggio giratore è 0.15, si ottiene $\beta L=1.236$ (1.397, 1.070) e $L_I=0.66L$ (0.67L, 0.66 L), contro $\beta L=1.875$, e $L_I=0.73L$ del caso senza massa ($km=kj=0$). Si può osservare che già con $km=0.5$ (una ruota che pesa la metà della trave) il DTA si sposta nella posizione corrispondente al STA. In questo caso la massa vibrante può essere aggiustata in modo da avere lo stesso valore della frequenza naturale del sistema continuo, mentre la forma del modo all'estremità libera è assicurata dalla coincidenza di DTA e STA. Se la forcella si comportasse come una trave con una massa e un'inerzia aggiunte all'estremità la modellazione con un sistema ad 1 gdl sarebbe sufficiente. Sfortunatamente [9] sembra indicare il contrario, cioè che gli assi di deformazione statico e dinamico non sono coincidenti.

A questo punto è anche evidente che i modelli ad 1 gdl non possono assicurare in generale la SCF, la SCT e la DC, a meno che il sistema non abbia delle caratteristiche particolari, STA=DTA.

Si propone quindi l'utilizzo di un sistema a 2 gdl che garantisce in generale SCF, SCT e DC per la flessione. Il modello può essere facilmente esteso al caso della torsione (2+1 gdl). E' intuitivo che sia necessario aggiungere una rigidezza per avere una migliore modellazione del sistema continuo. Per quanto riguarda SCF e SCT ci sono 4 vincoli, stesso spostamento e rotazione quando viene applicata una coppia e stesso spostamento e rotazione quando viene applicata una forza, e 4 parametri, i due valori delle rigidezze e la loro posizione sull'asse della trave. In realtà solo 3 dei 4 vincoli sono indipendenti, per via della simmetria della matrice di rigidezza. E' interessante osservare che il problema ammette solo soluzioni complesse se entrambe le rigidezze sono di tipo rotazionale. Diversamente il problema ammette soluzione reale se una rigidezza è di tipo traslazionale e l'altra è rotazionale. Ovviamente la soluzione non dipende dalla posizione della rigidezza traslazionale lungo l'asse della trave e dunque il problema ha 3 parametri. Si ottiene una rigidezza rotazionale $K_I=EJ/L$ a $L_I=L/2$, e una traslazionale di $K_2=12EJ/L^3$. Gli stessi risultati si possono ottenere in modo elegante mediante la decomposizione della matrice di rigidezza della trave: K_1 e K_2 sono le rigidezze principali del sistema, e il centro della trave rappresenta il centro di elasticità. Per quanto riguarda la decomposizione della matrice di rigidezza, essa viene ottenuta mediante la soluzione di due

problemi agli autovalori (EigenWrench e EigenTwist). Si tratta di un'applicazione recente della teoria della vite (R.S.Ball 1840-1913). Le applicazioni e le pubblicazioni recenti sono principalmente legate alla robotica, [6],[7].

Ora che SCF e SCT sono state ottenute, procediamo con la DC. Ottenere DC significa avere la corretta posizione dell'asse di deformazione dinamico (forma del modo corretta all'estremo libero) e la corretta frequenza naturale. In [7] è stata ottenuta una formulazione del problema agli autovalori per un sistema piano in funzione della posizione del centro (nodo) della vibrazione, cioè di DTA, e della frequenza naturale del modo. Applicando il metodo al sistema riportato in Figura 59 e risolvendo le equazioni in m_2 e I_{y2} (massa e momento di inerzia baricentrico della parte di trave soggetta a vibrazione, cioè dopo le due molle) si ottiene

$$m_2 = \frac{-2 L^4 c^2 km \rho A (-2 EVx + L) \beta^4 - 48 E J EVx}{L^3 c^2 \beta^4 (-4 EVx + L)} \quad (6)$$

$$I_{y2} = \frac{-8 \rho \beta^4 \left(\frac{km}{8} + kj \right) A c^2 L^5 + 2 \beta^4 L^4 c^2 EVx km \rho A + 8 L E J + 24 E J EVx}{8 L^2 \beta^4 c^2} \quad (7)$$

dove EVx è la distanza tra il centro di elasticità E (nel caso della trave coincide con il centro della trave) e il centro della vibrazione V , β è di fatto la frequenza naturale del sistema continuo ($\omega = \beta L^2$), c dipende dalle caratteristiche della trave

$$c = \sqrt{\frac{E J}{\rho A}}$$

Fissata dunque la posizione dell'asse di torsione (EVx) e la frequenza naturale del sistema (β), si ottengono m_2 e I_{y2} che permettono di avere lo stesso asse di deformazione (DTA) e la stessa frequenza naturale del sistema continuo.

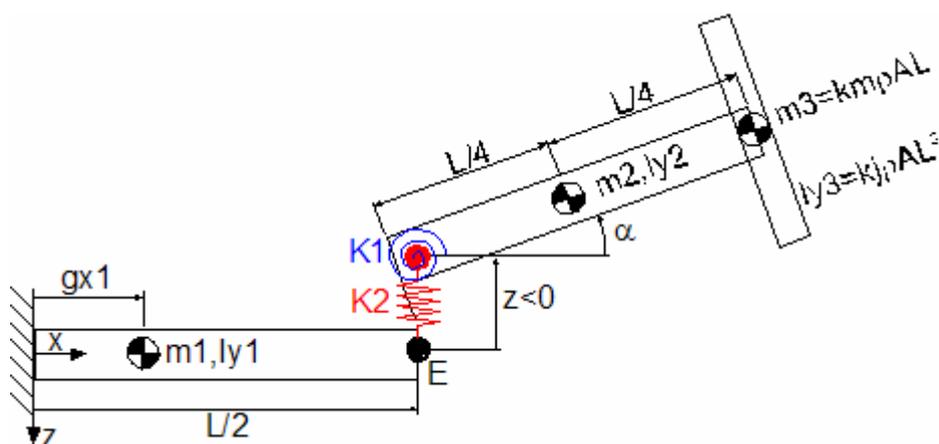


Figura 59 - Modello di trave a 2 gdl

Le caratteristiche della parte non vibrante della trave (massa $m1$, posizione del baricentro dall'estremo incastrato $gx1$, inerzia baricentrica $Iy1$) vengono calcolate per differenza tra le caratteristiche globali della trave e le caratteristiche della parte vibrante ($m2, Iy2$).

Riassumendo, se si vuole ottenere SCF, SCT e DC (primo modo di vibrare) tra il sistema continuo senza massa attaccata all'estremità e il sistema a 2 gdl si dovranno utilizzare le (6) e (7) con $km=0$, $kj=0$, $\beta L=1.875$, $EVx=-0.23L$ e si otterrà $m2=0.465\rho AL$ e $Iy2=0.025\rho AL^3$. Inoltre facendo la differenza tra le caratteristiche di tutta la trave e la parte vibrante della trave si otterrà $gx=0.283L$, $m1=0.535\rho AL$ e $Iy1=0.004\rho AL^3$. Il rapporto tra le prime due frequenze naturali del modello a 2 dof è 2.6 (nel sistema continuo è 6.3).

Se invece si vuole ottenere SCF, SCT e DC (primo modo di vibrare) tra il sistema continuo con una massa attaccata all'estremità pari alla massa della trave e il sistema a 2 gdl si dovranno utilizzare le (6) e (7) con $km=1$, $kj=0.15^2$, $\beta L=1.236$, $EVx=-0.16L$ e si otterrà $m2=0.397\rho AL$ e $Iy2=0.035\rho AL^3$. Inoltre facendo la differenza tra le caratteristiche di tutta la trave e la parte vibrante della trave si otterrà $gx=0.336L$, $m1=0.603\rho AL$, $Iy1=0.007\rho AL^3$. Il rapporto tra le prime due frequenze naturali del modello a 2 gdl è 4.6 (nel sistema continuo è 7.1)

I modelli a 2dof appena descritti hanno le stesse caratteristiche inerziali (posizione del baricentro, massa, tensore di inerzia), le stesse deformate statiche all'estremità per forze e/o momenti applicati all'estremità, la stessa prima frequenza naturale (flessionale) e la stessa forma del modo all'estremità, quando confrontati con il sistema continuo (con o senza massa e inerzia aggiunte all'estremità). Inoltre la SCF, SCT e DC (primo modo di vibrare) viene estesa senza difficoltà (in quanto sono sistemi ad 1 gdl) alla torsione e alle deformazioni assiali aggiungendo una rigidità rotazionale e una traslazionale allineate con l'asse di torsione.

Non deve sfuggire che l'approccio è generale (sistemi 3D simmetrici), anche se qui applicato ad una trave. Infatti la decomposizione della matrice di rigidità (quindi la determinazione delle rigidità principali e la loro posizione) può essere applicata ad un sistema generico. Così come può essere applicato ad un sistema generico il calcolo della massa e inerzia che assicurano la frequenza e la forma del primo modo di vibrare.

Una domanda legittima è se sia necessario tenere in considerazione anche la seconda frequenza naturale. Nel caso della trave e della forcilla di [9] e dei forcelloni e forcelle analizzati la seconda frequenza flessionale è alquanto distante dalla prima, e dunque al di fuori dello spettro di frequenze che possono influenzare la stabilità e la maneggevolezza/manovrabilità del veicolo.

3.2 Modelli a parametri concentrati per il forcellone e per la forcella

Il metodo descritto nella sezione 3.1 è stato applicato a tre forcelloni oscillanti posteriori e ad una forcella anteriore per verificarne l'applicabilità ai sistemi reali. Sostanzialmente sono state calcolate le direzioni e i valori delle rigidezze principali e sono stati calcolati i modi di vibrare. Di seguito verranno fatte solo delle considerazioni generali sui risultati.

Per quanto riguarda i forcelloni posteriori, è stato riscontrato che la posizione del centro di elasticità può trovarsi sia davanti che dietro al punto di contatto ruota/terreno. I risultati sono stati confermati dalle misure sperimentali di rigidezza. Il comportamento, che potrebbe sembrare singolare, è dovuto alla presenza dell'asse della ruota. L'effetto dell'asse della ruota è di modificare la forma della deformata del forcellone rispetto alla deformata della trave continua, riducendo il rapporto tra rotazione e spostamento laterale (che può anche diventare negativo). Al contrario la deformata di un forcellone monobraccio è molto più vicina a quella della trave continua. La posizione di DTA è risultato essere diverso da STA.

Per quanto riguarda la forcella anteriore, ci si è concentrati sulla flessione. Ancora DTA non coincide con STA ed è in più lontano dal punto di contatto ruota-terreno. Qualitativamente i risultati sono simili a [9], ma la distanza tra DTA e STA è minore.

Conclusioni

Il lavoro ha discusso i tratti salienti del modello multi-body di motociclo allo stato dell'arte sviluppato, del modello di controllo implementato, e ha evidenziato le problematiche relative alla modellazione delle flessibilità strutturali con modelli a parametri concentrati ad 1 gdl (che sono i più diffusi in letteratura).

L'applicazione del codice ha consentito il calcolo delle rigidzze equivalenti del veicolo, la decomposizione della coppia di sterzo nelle sue componenti principali, l'analisi dell'effetto delle flessibilità strutturali sulla stabilità dei modi di vibrare weave e wobble, la possibilità di instabilità di tipo chatter qualora si tenga in considerazione la flessibilità del sistema di trasmissione, la possibilità di simulare le vibrazioni di tipo kick-back grazie al modello di interazione pneumatico-strada implementato, la possibilità di tenere in considerazione l'impedenza del pilota e il suo effetto sulla stabilità del veicolo.

Bibliografia

- [1] Cossalter, Lot, Maso, Massaro, Sartori. A Motorcycle Riding Simulator for the Improvement of the Rider Safety, proc. of the *FISITA World Automotive Congress*, Munich, Germany, 14-19 September 2008.
- [2] Bobbo, Cossalter, Massaro, Peretto. Application of the “Optimal Maneuver Method” for enhancing racing motorcycle performance, proc. of the *SAE Motorsports Engineering Conference and Exhibition*, Concord, North Carolina, December 2-4, 2008.
- [3] Massaro, Lot. Application of Laplace Transform Techniques to Non-Linear Control Optimization, proc. of the *Multibody Dynamics 2007*, Milano, Italy, June 25–28, 2007.
- [4] Lot, Massaro, Sartori. Advanced Motorcycle Virtual Rider, *Vehicle System Dynamics*, Supplement 46, 215-224, 2008.
- [5] Cossalter, Dalla Torre, Lot, Massaro. A multibody tool for the Optimization of the Suspension Setup and Geometric Layout of Racing Motorcycles, proc. of the *FISITA 2008 World Automotive Congress*, 14-19 September, Munich, Germany.
- [6] Blanchet, Lipkin. Dual Properties for Vibration Analysis via Screw Theory, proc. of the *DETC'98 ASME Design Engineering Technical Conferences*, Atlanta, Georgia, September 13-16, 1998.
- [7] Blanchet. Linear Vibration Analysis via Screw Theory, *PhD dissertation*, Georgia Institute of Tehnology, 1998.
- [8] Sharp, Limebeer. On steering oscillations of motorcycles, proc. *IMechE.*, Part C, Journal of Mechanical Engineering Science, Vol.18, 2004, 1449-1456.
- [9] Giles, Sharp. Static and dynamic stiffness and deflection mode measurements on a motorcycle, with particular reference to steering behaviour., proc. of *IMechE Conference on Road Vehicle Handling*, 1983, 185-192.
- [10] Cossalter, Lot. A Motorcycle Multi-Body Model for Real Time Simulations Based on the Natural Coordinates Approach, *Vehicle System Dynamics*, 37, 423-447, 2002.
- [11] Cossalter. Motorcycle Dynamics. Lulu.com, 2006, ISBN: 978-1-4303-0861-4.
- [12] Massaro. L'effetto delle flessibilità strutturali sulla stabilità dei motocicli, *tesi di laurea*, Università di Padova, 2004.
- [13] Cossalter, Lot, Massaro. The Significance of Frame Compliance and Rider Mobility on the Motorcycle Stability, proc. of the *ECCOMAS International Conference on Advances in Computational Multibody Dynamics*, Madrid, Spain, 21-24 June 2005.

- [14] Cossalter, Lot, Massaro. The influence of Frame Compliance and Rider Mobility on the Scooter Stability, *Vehicle System Dynamics*, 45, 315-326, 2007.
- [15] Lot. A motorcycle tire model for dynamic simulations, *Meccanica*, 39, 207–220, 2004.
- [16] Cossalter, Lot, Maggio. The Influence of Tire Properties on the Stability of a Motorcycle in Straight Running and Curves, proc. of the *SAE Automotive Dynamics and Stability Conference*, SAE 2002-01-1572.
- [17] De Falco, Della Valle, Di Massa, Pagano. The influence of the tyre profile on motorcycle behaviour, *Vehicle System Dynamics*, 43, 179–186, 2005.
- [18] Sharp. The stability and control of motorcycles, *Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 13, 5, 316-329, 1971.
- [19] Sharp. The lateral dynamics of motorcycles and bicycles, *Vehicle System Dynamics*, 14, 265-283, 1985.
- [20] Sharp. Design for Good Motorcycle Handling Qualities, *SAE 972124*, 359-366, 1997.
- [21] Sharp. Stability, Control and Steering Responses of motorcycles. *Vehicle System Dynamics*, Vol. 35, 4-5, 291-318, 2001.
- [22] Sharp, Alstead. The influence of structural flexibilities on the straight-running stability of motorcycles. *Vehicle System Dynamics*, 9, 327-357, 1980.
- [23] Spierings. The effect of lateral front fork flexibility on the vibration modes of straight-running single-track vehicles, *Vehicle System Dynamics*, 10, 21-35, 1981.
- [24] Koenen, Pacejka. Influence of Frame Elasticity, Simple Rider Body Dynamics and Tyre Moments on Free Vibrations of Motorcycles in Curves, proc. of the *IAVSD Symposium*, 1982.
- [25] Marumo, Katayama. Effects of Structural Flexibility on Weave Mode of Motorcycle, proc of the *6th International Symposium on Advanced Vehicle Control (AVEC '02)*, Hiroshima, Japan , 2002.
- [26] Hikichi, Tagaci. Dynamic Characteristics of a Motorcycle with a Single-Side Supported Swing Arm, *SAE 905214*, 721-731, 1990.
- [27] Katayama, Aoki, Nishimi, Okayama. Measurement of Structural Properties of Riders, proc. of the *4th International Pacific Conference on Automotive Engineering*, Melbourne, Australia, 1987.
- [28] Nishimi, Aoki, Katayama. Analysis of Straight Running Stability of Motorcycles, proc. of the *10th International Technical Conference on Experimental Safety Vehicles*, Oxford, England, 1985.

- [29] Marumo, Katayama. Effect of Motorcycle Tandem Riding on Weave Mode Stability, Thesis collection of the *Journal of Automotive Technology Association*, v 36, n 6, 2005.
- [30] Raines, Thorpe. The relationship between twist axis and effective torsional axis of a motorcycle frame. *IMechE*, v 200, n D1, 69-73, 1986.
- [31] Imaizumi, Fujioka. Effects of the Rear Load and the Suspension Assembly on Wobble and Weave Motions, *SAE 972125*, 1997.
- [32] Limebeer, Sharp. Nonlinear steering oscillations of motorcycles, proc. of the *43rd IEEE Conference on Decision and Control*, Atlantis, Paradise Island, Bahamas, December 14-17, 2004.
- [33] Limebeer, Sharp, Evangelou. Motorcycle Steering Oscillations Due to Road Profiling, *Journal of Applied Mechanics*, v 69, n 6, 2002, pp.724-739.
- [34] Pick, Cole. Neuromuscular dynamics and the vehicle steering task, *Vehicle System Dynamics*, Supplement 41, 2004, p.182-191
- [35] Pick, Cole. Neuromuscular dynamics in the driver-vehicle system, *Vehicle System Dynamics*, Supplement 44, 2006, p.624-631.
- [36] Pick, Cole. Dynamic properties of a driver's arms holding a steering wheel, proc. of the *IMechE*, Vol. 221 Part D: J. Automobile Engineering, 2007.
- [37] Evangelou, Limebeer, Sharp, Smith. Steering compensation for high-performance motorcycles proc. of the *43rd IEEE Conference on Decision and Control*, Atlantis, Paradise Island, Bahamas, December 14-17, 2004.
- [38] Evangelou, Tomas-Rodriguez. Influence of Road Camber on Motorcycle Stability, proc. of *ISCCSP 2008*, Malta, 12-14 March, 2008.
- [39] Sharp, Evangelou, Limebeer. Advances in Motorcycle Dynamics, *Multibody System Dynamics*, 12, 251-283, 2004.
- [40] Pacejka. *Tire and vehicle dynamics*, SAE International, 2005, ISBN: 978-0-7680-1702-1.
- [41] Frezza, Beghi. A virtual motorcycle driver for closed-loop simulation, *IEEE Control Systems Magazine*, v 26, n 5, October, 2006, p 62-77.
- [42] Plöchl, Edelmann. Driver models in automobile dynamics application, *Vehicle System Dynamics*, Vol. 45, Nos. 7-8, July-August 2007, 699-741.
- [43] Cossalter, Da Lio, Lot, Fabbri. A general method for the evaluation of vehicle manoeuvrability with special emphasis on motorcycles, *Vehicle System Dynamics*, vol. 31, pp. 113-135, 1999.

- [44] Bertolazzi, Biral, Da Lio. Symbolic-numeric efficient solution of optimal control problems for multibody systems, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 185(2006) 404–421.
- [45] Saccon, Hauser, Beghi. A Virtual Rider for Motorcycles: An Approach Based on Optimal Control and Maneuver Regulation, *ISCCSP 2008*, Malta, 12-14 March 2008.
- [46] Lot, Massaro. A combined model of tire and road surface for the dynamics analysis of motorcycle handling, proc. of the *FISITA World Automotive Congress*, Yokohama, Japan, 22-27 October 2006.
- [47] Cossalter, Lot, Massaro. The chatter of racing motorcycle, *Vehicle System Dynamics*, 46, 339-353, 2008.
- [48] Lot, Massaro. The Kick-Back of Motorcycles: Experimental and Numerical Analysis, proc. of the *ECCOMAS Thematic Conference, Multibody Dynamics*, Milano, Italy, June 25–28, 2007.
- [49] Lot, Da Lio. A Symbolic Approach for Automatic Generation of the Equations of Motion of Multibody Systems. *Multibody System Dynamics*, 12, 147-172, 2004.
- [50] Torok. *Analytical Mechanics*, Wiley-IEEE, 2000, ISBN 9780471332077.
- [51] Genta. *Motor Vehicle Dynamics*, World Scientific 1997, ISBN 9789810229115.
- [52] Cossalter, Doria. The relation between contact patch geometry and the mechanical properties of motorcycle tyres. *Vehicle System Dynamics*, 43, 156-167, 2004.
- [53] Jalón, Bayo. Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems. The Real-Time Challenge, ISBN 0-387-94096-0, 440 pp., Springer-Verlag, New-York, 1994.
- [54] De Vries, Pacejka. Motorcycle Tyre Measurements and Models, *Vehicle System Dynamics*, 28, 280-298, 1998.
- [55] Corno, Savaresi. Experimental Identification of Engine-to-Slip Dynamics for Traction Control Applications in a Sport Motorbike. *European Journal of Control*, to appear.
- [56] Rigamonti, Dinamica laterale della motocicletta: identificazione sperimentale dei modi di vibrare weave e wobble, *tesi di laurea*, Politecnico di Milano, 2002.
- [57] Sharp. Vibrational modes of motorcycles and their design parameter sensitivities, *IMechE*, C486/016/94, 1994.
- [58] Cossalter, Doria, Fabris, Maso. Measurement and identification of the vibration characteristics of motorcycle riders, proc. of *ISMA 2006*, Leuven, Belgium, September 18-20, 2006.

- [59] Burns. *Advanced Control Engineering*, Butterworth-Heinemann, 2001, ISBN 0750651008.
- [60] Cheli, Pennestrì. *Cinematica e dinamica dei sistemi multibody*, CEA, 2006, ISBN 8840813454
- [61] Roland, Douglas. Simulation Study on Motorcycle Stability at High Speed, Proc. of the 2nd international congress on automobile safety, San Francisco, California, 1973.
- [62] Ulf Sellgren. Component mode synthesis, *Technical Report*, Department of Machine Design, The Royal Institute of Technology (KTH), S-100 44 Stockholm, Sweden, 2003.
- [63] Guyan. Reduction of Stiffness and Mass Matrices, *AIAA Journal*, v3, 1965.
- [64] Hurty. Dynamic Analysis of Structural System using Component Modes, *AIAA Journal*, v3,n4, 1965.
- [65] Craig Bambton. Coupling of Substructures for Dynamic Analyses, *AIAA Journal*, Vol. 6, No. 7, July 1968.
- [66] www.marintes.si/MSC_Adams/ProductCatalog_r5.pdf
- [67] www.lmsintl.com/simulation/motion/options
- [68] Rao. *Mechanical Vibrations*, Addison-Wesley, ISBN 9780201526868, 1995.

Indice delle figure

Figura 1 - Terne di corpo	10
Figura 2 - Angolo di camber e angolo di slope.....	17
Figura 3 - Modello del contatto tra il pneumatico e la strada	18
Figura 4 - Definizione della strada.....	19
Figura 5 - Descrizione parametrica della strada.....	20
Figura 6 - Modello di strada utilizzato nel simulatore.....	21
Figura 7 - Modellazione della flessibilità della trasmissione.....	22
Figura 8 - Modello del pilota per lo studio dell'effetto dell'impedenza.....	26
Figura 9 - Funzione di trasferimento tra angolo di sterzo e coppia al telaio, pilota medio	28
Figura 10 - Confronto tra la funzione di trasferimento del pilota medio e 3 ammortizzatori di sterzo	29
Figura 11 - Forcellone oscillante	30
Figura 12 - Quadrilatero posteriore (paralever)	31
Figura 13 - Forcella telescopica.....	33
Figura 14 - Telelever.....	34
Figura 15 - Duolever.....	36
Figura 16 - Flessibilità concentrate nel modello.....	37
Figura 17 - Definizione di corpo sospeso	38
Figura 18 - Architettura del sistema di controllo	41
Figura 19 - FFT di una motocicletta MotoGP 2006, circuito del Qatar.....	41
Figura 20 - Coordinate curvilinee	41
Figura 21 - Funzione costo per la larghezza della strada.....	43
Figura 22 - Valutazione della risposta del sistema linearizzato.....	44
Figura 23 - Lane-change, $V=18$ m/s	45
Figura 24 - Simulazione del modello complesso con ingressi ottimi del modello semplice	45
Figura 25 - Anello di rollio	46
Figura 26 - Diagrammi di Nyquist per la funzione di trasferimento $T=PI*LP*M$ a diverse velocità e accelerazioni laterali ($PI=-1$, LP =filtro passa-baso, M = modello del veicolo)	46
Figura 27 - Simulazioni con il solo anello di rollio	47
Figura 28 - Anello sulla posizione laterale	48
Figura 29 - Funzione di trasferimento tra errore di rollio e errore laterale.....	49

Figura 30 - Funzione di trasferimento tra coppia di sterzo e posizione laterale e tra angolo di sterzo e posizione laterale (modello di veicolo Sharp'71 a 20 m/s).....	50
Figura 31 - Decomposizione della coppia di sterzo	60
Figura 32 - Effetto della flessibilità anteriore sul modo wobble, scooter	61
Figura 33 - Effetto della flessibilità anteriore sul modo wobble, moto touring.....	61
Figura 34 - Effetto della flessibilità anteriore sul modo wobble, moto sportiva.....	62
Figura 35 - Effetto della flessibilità posteriore sul modo weave, scooter	63
Figura 36 - Effetto della flessibilità posteriore sul modo weave, moto touring.....	64
Figura 37 - Effetto della flessibilità posteriore sul modo weave, moto sportiva	65
Figura 38 - Effetto della flessibilità del cerchione posteriore, moto touring	66
Figura 39 - Effetto della flessibilità del cerchione anteriore, moto touring.....	66
Figura 40 - Luogo delle radici, motocicletta GP125, velocità=25-50 m/s.....	67
Figura 41 - Componenti modali dei modi <i>rear hop</i> , <i>front hop</i> e <i>transmission</i> in termini di forze, a 35 m/s e con accelerazione longitudinale nulla.....	68
Figura 42 - Autovalori per velocità da 50 a 25 m/s e decelerazione pari a 5.7 m/s^2	69
Figura 43 - Simulazione di frenata da 50 a 25 m/s con decelerazione di 5.7 m/s^2 (50% freno anteriore e 50% freno-motore)	70
Figura 44 - Simulazione di frenata da 50 a 25 m/s con decelerazione di 5.7 m/s^2 (100% freno anteriore)	70
Figura 45 - Deformazione radiale e laterale del pneumatico e profilo stradale	72
Figura 46 - Traiettoria del punto di contatto sulla carcassa del pneumatico.....	73
Figura 47 - Simulazioni numeriche di kick-back, $v=20 \text{ m/s}$	74
Figura 48 - Effetto delle rigidzze del pneumatico sulle oscillazioni di kick-back, $v=20 \text{ m/s}$	75
Figura 49 - Effetto dell'ammortizzatore di sterzo sulle oscillazioni di kick-back, $v=20 \text{ m/s}$	75
Figura 50 - Luogo delle radici: effetto dell'impedenza del pilota.....	76
Figura 51 - Modo weave stabile ($v=30 \text{ m/s}$, $f=2.89 \text{ Hz}$).....	76
Figura 52 - Modo weave instabile ($v=50 \text{ m/s}$, $f=3.37 \text{ Hz}$).....	76
Figura 53 - Modo wobble ($v=1 \text{ m/s}$, $f=9.06 \text{ Hz}$).....	77
Figura 54 - Modo wobble ($v=60 \text{ m/s}$, $f=10.75 \text{ Hz}$).....	77
Figura 55 - Modo rider-wobble ($v=1 \text{ m/s}$, $f=6.73 \text{ Hz}$).....	78
Figura 56 - Modo rider-wobble ($v=60 \text{ m/s}$, $f= 5.20 \text{ Hz}$)	78
Figura 57 - Luogo delle radici, modello di pilota completo <i>FastBike</i>	79
Figura 58 - Luogo delle radici, modello di pilota <i>FastBike</i> , parametri del pilota Sharp.....	80
Figura 59 - Modello di trave a 2 gdl.....	85

Ringraziamenti

Ringrazio il gruppo di ricerca MDRG dell'Università di Padova e il VDG di Harley-Davidson per il supporto fornito, ed in particolare il prof. Cossalter, il prof. Lot, R. Sartori, J. Brendelson, J. Sadauckas e M. Paradise.