C. R. Acad. Sci. Paris, t. 311, Série I, p. 23-26, 1990 

Analyse mathématique/*Mathematical Analysis*

# Un théorème d'image inverse pour les faisceaux. Applications au problème de Cauchy

Andrea D'Agnolo et Pierre Schapira

***Résumé*** – Soient $f:Y\to X$ un morphisme de variétés réelles, F et K deux faisceaux sur X (plus exactement des objets de la catégorie dérivée), L un faisceau sur Y et $\psi$ un morphisme $L\to f^{-1}K$. On donne ici des conditions de nature microlocale sur ces objets pour que le morphisme naturel $f^{-1}R\mathcal{H}om(K, F)\to R\mathcal{H}om(L, f^{-1}F)$ soit un isomorphisme sur une partie Z de Y. On montre ensuite comment ce théorème permet en particulier de retrouver des résultats classiques sur le problème de Cauchy à données holomorphes ramifiées.

## An inverse image theorem for sheaves. Applications to the Cauchy problem

***Abstract*** – *Let* $f:Y\to X$ *be a morphism of real manifolds, let* F *and* K *be two sheaves on* X (*more precisely objects of the derived category*), *let* L *be a sheaf on* Y *and let* $\psi$ *be a morphism* $L\to f^{-1}K$. *We give here conditions of microlocal type on these objects in order that the natural morphism* $f^{-1}R\mathcal{H}om(K, F)\to R\mathcal{H}om(L, f^{-1}F)$ *be an isomorphism on a subset* Z *of* Y. *Next, we show how this theorem allows us to recover classical results on the Cauchy problem with holomorphic ramified data.*

I. Rappels sur les faisceaux. – Nous suivrons les notations de [6] et [7]. Soient X une variété réelle, $\tau_X: TX\to X$ son fibré tangent et $\pi_X: T^*X\to X$ son fibré cotangent. On identifie X avec la section nulle $T^*_X X$ de $T^*X$ et on note $\dot{\pi}_X$ la projection $\dot{T}^*X:=T^*X\setminus X\to X$. Si A et B sont deux sous-ensembles de X, on note $C(A, B)$ le cône normal de A le long de B, un sous-ensemble conique et fermé de TX.

Soit $f:Y\to X$ un morphisme de variétés réelles. On note ${}^tf'$ et $f_\pi$ les applications naturelles associées :

$$T^*Y\overset{{}^tf'}{\leftarrow}Y\times_X T^*X\overset{f_\pi}{\to}T^*X.$$

On pose $T^*_Y X={}^tf'^{-1}(T^*_Y Y)$.

On note $D^b(X)$ la catégorie dérivée de la catégorie des complexes bornés de faisceaux de A-modules sur X, où A est un anneau commutatif de dimension globale finie (e. g. $A=\mathbf{Z}$). On note $\omega_X$ le complexe dualisant sur X ($\omega_X\cong or_X[\dim X]$ où $or_X$ est le faisceau d'orientation et $\dim X$ est la dimension de X). Si F est un objet de $D^b(X)$, on lui associe son micro-support SS(F), un sous-ensemble conique, involutif et fermé de $T^*X$, et on dit que $f:Y\to X$ est non caractéristique pour F si $f_\pi^{-1}(SS(F))\cap T^*_Y X\subset Y\times_X T^*_X X$. On définit plus généralement la notion pour $f$ d'être non caractéristique pour F sur un sous-ensemble de $T^*Y$ et nous renvoyons à [6] pour la définition précise. On utilisera le foncteur $\mu hom$ de $D^b(X)^\circ\times D^b(X)$ dans $D^b(T^*X)$, défini dans [6]. En particulier on rappelle que pour F et G objets de $D^b(X)$, on a :

$$(1.1)\qquad \operatorname{supp}\mu hom(G, F)\subset SS(G)\cap SS(F),$$

$$(1.2)\qquad R\pi_{X*}\mu hom(G, F)=R\mathcal{H}om(G, F).$$

Si $p_X\in T^*X$, on note $D^b(X; p_X)$ la catégorie localisée de $D^b(X)$ par $\{F\in Ob(D^b(X)); p_X\notin SS(F)\}$. On rappelle qu'un morphisme $u:F\to G$ dans $D^b(X)$ devient un isomorphisme dans $D^b(X; p_X)$ si $p_X\notin SS(H)$, H étant le troisième terme d'un triangle distingué $F\overset{u}{\to}G\to H\overset{+1}{\to}$. On dit alors que $u$ est un isomorphisme en $p_X$.

Note présentée par Jean Leray.

0764-4442/90/03110023 \$ 2.00 © Académie des Sciences

II. Théorème d'image inverse pour les faisceaux. — Soit $f: \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ un morphisme de variétés analytiques réelles.

Soit $p \in \mathrm{Y} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{T}^* \mathrm{X}$ et posons $p_{\mathrm{X}} = f_\pi(p)$, $p_{\mathrm{Y}} = {}^t f'(p)$. Remarquons que $f^{-1}$ et $f^!$ ne sont pas des foncteurs bien définis sur $\mathrm{D}^b(\mathrm{X}; p_{\mathrm{X}})$. Si F est un objet de $\mathrm{D}^b(\mathrm{X}; p_{\mathrm{X}})$ on appelle image inverse microlocale $f_{\mu, p}^{-1}\mathrm{F}$ de F le pro-objet $\text{"}\varprojlim_{\mathrm{F}' \to \mathrm{F}}\text{"}\, f^{-1}\mathrm{F}'$ où $\mathrm{F}' \to \mathrm{F}$ parcourt la catégorie des morphismes de $\mathrm{D}^b(\mathrm{X})$ qui sont des isomorphismes au point $p_{\mathrm{X}}$.

Si $p$ est isolé dans $f_\pi^{-1}(\mathrm{SS}(\mathrm{F})) \cap {}^t f'^{-1}(p_{\mathrm{Y}})$, on montre (*cf.* [7]) qu'il existe F' isomorphe à F dans $\mathrm{D}^b(\mathrm{X}; p_{\mathrm{X}})$ tel que $f$ est non caractéristique pour F' et $f_\pi^{-1}(\mathrm{SS}(\mathrm{F}')) \cap {}^t f'^{-1}(p_{\mathrm{Y}}) \subset \{p\}$. L'objet $f^{-1}\mathrm{F}'$ de $\mathrm{D}^b(\mathrm{Y}; p_{\mathrm{Y}})$ représente alors $f_{\mu, p}^{-1}\mathrm{F}$.

Le théorème suivant est une approche du problème de Cauchy en théorie des faisceaux.

Théorème 2.1. — *Soient* F *et* K *des objets de* $\mathrm{D}^b(\mathrm{X})$, *soient* L *un objet de* $\mathrm{D}^b(\mathrm{Y})$ *et* $\psi: \mathrm{L} \to f^{-1}\mathrm{K}$ *un morphisme. Soit* Z *un sous ensemble de* Y *et soit* V *un voisinage ouvert de* $\dot{\pi}_{\mathrm{Y}}^{-1}(\mathrm{Z})$ *dans* $\mathrm{T}^*\mathrm{Y}$. *On suppose que :*

(i) $f$ *est non caractéristique pour* F *et pour* K,

(ii) $f_\pi$ *est non caractéristique pour* $\mathrm{C}(\mathrm{SS}(\mathrm{F}), \mathrm{SS}(\mathrm{K}))$ *sur* ${}^t f'^{-1}(\mathrm{V})$.

*On suppose de plus que pour chaque* $p_{\mathrm{Y}} \in \dot{\pi}_{\mathrm{Y}}^{-1}(\mathrm{Z})$ *il existe* $\{p_1, \ldots, p_r\}$ *dans* ${}^t f'^{-1}(p_{\mathrm{Y}})$ *tel que :*

(iii) ${}^t f'^{-1}(p_{\mathrm{Y}}) \cap f_\pi^{-1}(\mathrm{SS}(\mathrm{F})) \subset \{p_1, \ldots, p_r\}$,

(iv) $p_1, \ldots, p_r$ *sont isolés dans* ${}^t f'^{-1}(p_{\mathrm{Y}}) \cap f_\pi^{-1}(\mathrm{SS}(\mathrm{K}))$,

(v) *le morphisme induit par* $\psi$, $\mathrm{L} \to f_{\mu, p_j}^{-1}\mathrm{K}$, *est un isomorphisme dans* $\mathrm{D}^b(\mathrm{Y}; p_{\mathrm{Y}})$ *pour tout* $j = 1, \ldots, r$.

*Enfin on suppose que :*

(vi) K *et* L *sont faiblement* $\mathbb{R}$-*constructibles,*

(vii) *le morphisme induit par* $\psi$, $\mathrm{R}\Gamma_{\{y\}}(\mathrm{L} \otimes \omega_{\mathrm{Y}}) \to \mathrm{R}\Gamma_{\{x\}}(\mathrm{K} \otimes \omega_{\mathrm{X}})$, *est un isomorphisme pour chaque* $y \in \mathrm{Z}$, $x = f(y)$.

*Alors le morphisme naturel induit par* $\psi$ :

$$f^{-1}\mathrm{R}\mathscr{H}om(\mathrm{K}, \mathrm{F})|_{\mathrm{Z}} \to \mathrm{R}\mathscr{H}om(\mathrm{L}, f^{-1}\mathrm{F})|_{\mathrm{Z}} \tag{2.1}$$

*est un isomorphisme.*

*Esquisse de démonstration.* — Suivant une technique introduite dans [5], on considère le morphisme de triangles distingués :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{R}\pi_{\mathrm{Y}!}\mathrm{A} & \to & \mathrm{R}\pi_{\mathrm{Y}*}\mathrm{A} & \to & \mathrm{R}\dot{\pi}_{\mathrm{Y}*}\mathrm{A} & \xrightarrow{+1} & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathrm{R}\pi_{\mathrm{Y}!}\mathrm{B} & \to & \mathrm{R}\pi_{\mathrm{Y}*}\mathrm{B} & \to & \mathrm{R}\dot{\pi}_{\mathrm{Y}*}\mathrm{B} & \xrightarrow{+1}, & \end{array} \tag{2.2}$$

où $\mathrm{A} = \mathrm{R}\,{}^t f'_! f_\pi^{-1}\mu\mathrm{hom}(\mathrm{K}, \mathrm{F})$ et $\mathrm{B} = \mu\mathrm{hom}(\mathrm{L}, f^{-1}\mathrm{F})$. Utilisant (1.2), on est ramené à montrer que la première et la troisième flèche verticale de (2.2) sont des isomorphismes sur Z.

On déduit des hypothèses (vi) et (vii) que la première flèche est un isomorphisme.

La démonstration de ce que la troisième flèche est un isomorphisme découle de la proposition suivante qui se déduit immédiatement du théorème 6.7.1 de [7].

Proposition 2.2. — *Soient* F *et* K *deux objets de* $\mathrm{D}^b(\mathrm{X})$. *Soit* V *un voisinage ouvert de* $p_{\mathrm{Y}}$ *dans* $\mathrm{T}^*\mathrm{Y}$. *On suppose que*

(i) $f$ *est non caractéristique pour* F *et* K *sur* V,

(ii) $f_\pi$ *est non caractéristique pour* C(SS(F), SS(K)) *sur* ${}^t f'^{-1}(V)$.
*On suppose en plus qu'il existe* $p \in {}^t f'^{-1}(p_Y)$ *tel que :*
(iii) ${}^t f'^{-1}(p_Y) \cap f_\pi^{-1}(SS(F)) \subset \{p\}$,
(iv) ${}^t f'^{-1}(p_Y) \cap f_\pi^{-1}(SS(K)) \subset \{p\}$.
*Alors le morphisme naturel :*

$$R^t f'_! f_\pi^{-1} \mu\mathrm{hom}(K, F)_{p_Y} \to \mu\mathrm{hom}(f^{-1}K, f^{-1}F)_{p_Y},$$

*est un isomorphisme.*

III. Applications. — Dans cette section on va utiliser le théorème 2.1 pour retrouver des résultats classiques sur le problème de Cauchy à données holomorphes ramifiées.

(*a*) Soient X une variété analytique complexe, Y et $Z_i$ ($i=1, \ldots, r$) des hypersurfaces lisses de X et Z une hypersurface lisse de Y. On suppose que les $Z_i$ sont deux à deux transverses et transverses à Y avec $Z_i \cap Y = Z$. Soient données des fonctions holomorphes $g: Y \to \mathbf{C}$, $g_i: X \to \mathbf{C}$ telles que $g_i \circ f = g$ et $Z = g^{-1}(0)$, $Z_i = g_i^{-1}(0)$, où on note par $f$ l'immersion de Y dans X.

Notons $\mathscr{D}_X$ le faisceau d'anneaux des opérateurs différentiels à coefficients holomorphes sur X et soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module à gauche cohérent, car ($\mathscr{M}$) sa variété caractéristique. On suppose qu'il existe un voisinage V de $\dot{T}_Z^* Y$ satisfaisant à :

(3.1) $f_\pi$ est non caractéristique pour C (car ($\mathscr{M}$), $\dot{T}_{Z_i}^* X$) sur ${}^t f'^{-1}(V)$ $(i=1, \ldots, r)$,

(3.2) $$\mathrm{car}(\mathscr{M}) \cap {}^t f'^{-1}(T_Z^* Y) \subset \bigcup_i T_{Z_i}^* X.$$

Soit $p: \tilde{\mathbf{C}}^* \to \mathbf{C}$ le recouvrement universel de $\mathbf{C} \setminus 0$ et $L = g^{-1} p_! A_{\tilde{\mathbf{C}}^*}$. Le complexe $\mathscr{O}_{Z|Y}^{\mathrm{ram}} := R\mathscr{H}om(L, \mathscr{O}_Y)$ est concentré en degré 0 et ses sections représentent les fonctions holomorphes sur Y ramifiées le long de Z (*cf.* [1] et [2]). Posons $K_i = g_i^{-1} p_! A_{\tilde{\mathbf{C}}^*}$ et remarquons que l'on a des flèches naturelles d'adjonction $\tau_i: K_i \to A_X$. On définit le complexe K de $D^b(X)$ comme étant le troisième terme d'un triangle distingué :

(3.3) $$K \to \bigoplus_{i=1}^r K_i \xrightarrow{h} \sum_{i=i}^r A_X \xrightarrow{+1},$$

où $\sum_{i=i}^r A_X$ est défini par la suite exacte $0 \to A_X \to \bigoplus_{i=1}^r A_X \xrightarrow{\sigma} \sum_{i=i}^r A_X \to 0$ et $h$ est défini par les $\tau_i$ ($h = \sigma \circ \bigoplus_i \tau_i$). On a une flèche naturelle $\psi: L \to f^{-1}K$ déduite des isomorphismes $L \cong f^{-1}K_i$.

On pose $\sum_i \mathscr{O}_{Z_i|X}^{\mathrm{ram}} := R\mathscr{H}om(K, \mathscr{O}_X)$. Si l'on choisit $F = R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathscr{O}_X)$ on a

$$R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \sum_i \mathscr{O}_{Z_i|X}^{\mathrm{ram}}) \cong R\mathscr{H}om(K, F)$$

et

$$R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Y}(\mathscr{M}_Y, \mathscr{O}_{Z|Y}^{\mathrm{ram}}) \cong R\mathscr{H}om(L, f^{-1}F).$$

En utilisant l'inclusion de SS(F) dans car ($\mathscr{M}$) (inclusion qui se déduit de [8], *cf.* [6]), on vérifie alors facilement que l'on peut appliquer le théorème 2.1 à (F, K, L, $\psi$), obtenant ainsi l'extension suivante du théorème de Hamada, Leray et Wagschal [3] aux systèmes généraux d'équations aux dérivées partielles :

THÉORÈME 3.1. — *Pour $\mathcal{M}$ vérifiant* (3.1) *et* (3.2), *le morphisme naturel :*

$$(3.4)\qquad \mathrm{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathcal{M}, \sum_i \mathcal{O}^{\mathrm{ram}}_{Z_i|X})|_Z \to \mathrm{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Y}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{O}^{\mathrm{ram}}_{Z|Y})|_Z,$$

*est un isomorphisme.*

(*b*) On peut aussi retrouver la variante suivante du théorème précédent donnée dans [5]. Posons

$$L^1_{\{0\}|C} = \mathrm{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_C}(\mathscr{D}_C/\mathscr{D}_C\, Dz\, D, \mathcal{O}_C).$$

Pour $L = g^{-1} L^1_{\{0\}|C}$, le complexe $\mathcal{O}^1_{Z|Y} := \mathrm{R}\mathscr{H}om(L, \mathcal{O}_Y)$ représente les fonctions holomorphes sur Y ayant une ramification de type logarithmique le long de Z.

Posons $K_i = g_i^{-1} L^1_{\{0\}|C}$, et construisons le complexe K dans $D^b(X)$ comme dans (3.3). On pose $\sum_i \mathcal{O}^1_{Z_i|X} := \mathrm{R}\mathscr{H}om(K, \mathcal{O}_X)$.

THÉORÈME 3.2. — *Pour $\mathcal{M}$ vérifiant* (3.1) *et* (3.2), *le morphisme naturel :*

$$\mathrm{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathcal{M}, \sum_i \mathcal{O}^1_{Z_i|X})|_Z \to \mathrm{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Y}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{O}^1_{Z|Y})|_Z,$$

*est un isomorphisme.*

(*c*) Dans [9] Schiltz montre comme on peut décomposer la solution du problème de Cauchy en une somme de fonctions holomorphes dans des ouverts dont le bord est défini par les hypersurfaces caractéristiques réelles issues du bord du domaine d'holomorphie des données. Avec un choix approprié de F, K et L, le théorème 2.1 nous permet de retrouver cette décomposition.

IV. COMMENTAIRES. — (1) Soulignons que dans toutes les démonstrations de nos résultats nous utilisons seulement : le théorème de Cauchy-Kowalevski dans la version précisée de Leray [8], la version faisceautique du théorème de Cauchy-Kowalevski due à Kashiwara [4], et les méthodes introduites dans [6] et [7]. Nous n'utilisons ni les opérateurs pseudo-différentiels ou les transformations canoniques quantifiées, ni aucune inégalité.

(2) Les résultats présentés dans cette Note seront détaillés dans un article à paraître.

Note remise le 9 avril 1990, acceptée le 24 avril 1990.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] P. DELIGNE, *SGA* 7, exposé XIII.
[2] A. GROTHENDIECK, *SGA* 7, exposé I.
[3] T. HAMADA, J. LERAY et C. WAGSCHAL, *J. Math. pures et appl.*, 55, 1976, p. 297-352.
[4] M. KASHIWARA, *Thèse* (en japonais), Tokyo, 1971.
[5] M. KASHIWARA et P. SCHAPIRA, *Inventiones Math.*, 46, 1978, p. 17-38.
[6] M. KASHIWARA et P. SCHAPIRA, *Astérisque* 128, 1985.
[7] M. KASHIWARA et P. SCHAPIRA, *Grundlehren der math. Wissenschaften*, Springer-Verlag, 292, 1990.
[8] J. LERAY, *Bull. Soc. Math. France*, 85, 1957, p. 389-430.
[9] D. SCHILTZ, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 306, série I, 1988, p. 177-180; *Ann. Fac. Sc. Toulouse*, 9, 1988, p. 269-294.

*Mathématiques, C.S.P., Université Paris-Nord*, 93430 *Villetaneuse.*