C. R. Acad. Sci. Paris, t. 324, Série I, p. 19-24, 1997
Analyse mathématique/*Mathematical Analysis*

Une interprétation cohomologique de la condition de Radon-Cavalieri

Andrea D'AGNOLO

Institut de Mathématiques, Université Pierre-et-Marie-Curie,
Case 247, 4, place Jussieu, 75252 Paris CEDEX 05, France.
E-mail; dagnolo@mathp6.jussieu.fr

Résumé. Dans cette Note, nous appliquons les méthodes des transformations intégrales pour les faisceaux et les $\mathcal{D}$-modules à l'étude de la transformée de Radon affine réelle. Classiquement, on obtient la « condition de Cavalieri » en utilisant la formule d'inversion pour la transformée de Fourier. Notre approche est différente, et montre comment cette condition, liée à la transformée de Radon projective complexe, est de nature géométrique (ou cohomologique).

A cohomological interpretation of the Radon–Cavalieri condition

Abstract. *In this Note, we apply the methods of integral transforms for sheaves and $\mathcal{D}$-modules to the study of the real affine Radon transform. Classically, the "Cavalieri condition" is obtained using the inversion formula for the Fourier transform. Our approach is different and shows how this condition, which is related to the complex projective Radon transform, is of a geometrical (or cohomological) nature.*

Abridged English Version

Let P be a complex n-dimensional projective space, P^* the dual projective space, and denote by $[z]$, $[\zeta]$ dual systems of homogeneous coordinates. Assume $n > 2$ for simplicity. Let $\mathbb{A} \subset \mathsf{P} \times \mathsf{P}^*$ be the incidence relationship defined by the equation $\langle z, \zeta \rangle = 0$. Let $L = \mathbb{C}_{(\mathsf{P}\times\mathsf{P}^*)\setminus\mathbb{A}}$ be the sheaf on $\mathsf{P} \times \mathsf{P}^*$ which is constant with fiber $\mathbb{C}$ on $(\mathsf{P} \times \mathsf{P}^*) \setminus \mathbb{A}$ and zero elsewhere. Denote by $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{R}-c}(\mathbb{C}_{\mathsf{P}})$ the bounded derived category of sheaves of $\mathbb{C}$-vector spaces on P with $\mathbb{R}$-constructible cohomology groups. For $F \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{R}-c}(\mathbb{C}_{\mathsf{P}})$, set

$$F \circ L = Rq_{2!}(q_1^{-1} F \otimes L),$$

where $X \xleftarrow[q_1]{} X \times Y \xrightarrow[q_2]{} Y$ are the natural projections, and $Rq_{2!}$, q_1^{-1} denote the operations of proper direct image and inverse image for sheaves. For $k \in \mathbb{Z}$, set $k^* = -n - 1 - k$, and denote by $\mathcal{O}_{\mathsf{P}}(k)$ the

Note présentée par Jean-Michel BONY.

$-k$th tensor power of the tautological line bundle on $\mathbf{P}$. By [3], corollary 4.5, for $-n-1<k<0$, there is a natural isomorphism:

$$\mathrm{R}\Gamma(\mathbf{P}; F \overset{\mathrm{w}}{\otimes} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(k)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}\Gamma(\mathbf{P}^*; (F \circ L) \overset{\mathrm{w}}{\otimes} \mathcal{O}_{\mathbf{P}^*}(k^*))[n], \tag{0.1}$$

where $\overset{\mathrm{w}}{\otimes}$ denotes the functor of formal cohomology introduced in [10].

Let P and P^* be real n-dimensional projective spaces of which $\mathbf{P}$ and $\mathbf{P}^*$ are linear complexifications. There are essentially two locally constant sheaves of rank one on P, here denoted by $\mathbb{C}_P(\varepsilon)$ for $\varepsilon \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (with $\mathbb{C}_P(0)$ being the constant sheaf). For $k \in \mathbb{Z}$, the complex $\mathbb{C}_P(\varepsilon) \overset{\mathrm{w}}{\otimes} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(k)$ is identified to $\mathcal{C}_P^\infty(\varepsilon|k)$. This is the C^∞-line bundle on P whose sections, written in homogeneous coordinates, satisfy the relation:

$$f(\lambda x) = (\operatorname{sgn} \lambda)^\varepsilon \lambda^k f(x), \qquad \forall \lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

As it is well known (*cf.* e.g., [4], p. 73) the real projective Radon transform $R_P^{(\varepsilon|k)}$ of definition 1.1 is an isomorphism for $-n-1<k<0$. In [3], we recovered this result as a corollary of formula (0.1) for $F = \mathbb{C}_P(\varepsilon)$, by checking that $\mathbb{C}_P(\varepsilon) \circ L$ is isomorphic to $\mathbb{C}_{P^*}(\varepsilon^*)[-n]$, up to constant sheaves on $\mathbf{P}^*$.

Let $E = P \setminus H$ be an affine chart. The Schwartz space $\mathcal{S}(E)$ of rapidly decreasing $\mathcal{C}^\infty$-functions is naturally identified to $\Gamma(\mathbf{P}; \mathbb{C}_E \overset{\mathrm{w}}{\otimes} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(k))$. Denote by $\xi_\circ \in P^*$ the point corresponding to $H \subset P$. For $-n-1<k<0$ and $\varepsilon^* \equiv 1$, the image of $\mathcal{S}(E)$ by $R_P^{(\varepsilon|k)}$ is the set of sections of $\mathcal{C}_{P^*}^\infty(\varepsilon^*|k^*)$, which are flat at $\xi_\circ$ and which satisfy the Cavalieri condition: for any non-negative integer m and for any ξ', the integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s\xi_\circ + \xi') s^m \, ds$$

is a homogeneous polynomial of degree $m + k^* + 1$ in ξ'.

Classically (*cf.* e.g., [4], p. 86), the proof of this statement makes use of the inversion formula for the Fourier transform. Here, we recover this result, in a projectively invariant manner, as a corollary of formula (0.1) for $F = \mathbb{C}_E$. More precisely, the embedding $H \hookrightarrow P$ induces by duality a projection $P^* \setminus \{\xi_\circ\} \to H^*$, where H^* is an $(n-1)$-dimensional real projective space. Denote by $q: \mathbf{P}^* \setminus \{\xi_\circ\} \to \mathbf{H}^*$ a complexification of this projection, and set $Q^* = q^{-1}(H^*)$. An explicit computation shows that, modulo constant sheaves on $\mathbf{P}^*$, there is a distinguished triangle:

$$\mathbb{C}_E \circ L \to \mathbb{C}_{P^* \setminus \{\xi_\circ\}}(1)[-n] \to \mathbb{C}_{\overline{Q^*}}[1-n] \underset{+1}{\longrightarrow} .$$

Using this distinguished triangle to compute the r.h.s. of (0.1), we see in particular how the Cavalieri condition is of a geometrical nature, the integrals being taken along lines whose complexifications are the fibers of q. By the Legendre contact transformation, these lines correspond to the complex conormal directions to H in $\mathbf{P}$.

---

1. Énoncé des résultats

Soit P un espace projectif réel de dimension n, P^* l'espace projectif dual, et $[x] = [x_0, \ldots, x_n]$, $[\xi]$ des systèmes de coordonnées homogènes duaux sur P et P^* respectivement. Pour $k \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, notons $\mathcal{C}_P^\infty(\varepsilon|k)$ le fibré en droites de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont les sections satisfont la relation :

$$f(\lambda x) = (\operatorname{sgn} \lambda)^\varepsilon \lambda^k f(x), \qquad \forall \lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}. \tag{1.1}$$

Considérons la distribution sur $\mathbf{R}$:

$$\delta^{(\varepsilon|k)}(t) = \frac{1}{2\pi i}\frac{d^k}{dt^k}\left(\frac{1}{t-i0} - \frac{(-1)^\varepsilon}{t+i0}\right).$$

DÉFINITION 1.1. – Pour $k^* = -n-1-k$, $\varepsilon^* \equiv -n-1-\varepsilon$, on considère la transformation intégrale :

$$R_P^{(\varepsilon|k)} : \Gamma(P;\mathcal{C}_P^\infty(\varepsilon|k)) \to \Gamma(P^*;\mathcal{C}_{P^*}^\infty(\varepsilon^*|k^*))$$
$$f(x) \mapsto \int f(x)\delta^{(n+\varepsilon|n+k)}(\langle x,\xi\rangle)\omega(x),$$

où $\omega(x) = \sum_{j=0}^n (-1)^j x_j dx_0 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_n$ désigne la n-forme de Leray.

Le résultat suivant est bien connu (*cf.* e.g., [4], p. 73) :

THÉORÈME 1.2. – *Pour $-n-1 < k < 0$, $R_P^{(\varepsilon|k)}$ est un isomorphisme, l'inverse étant donnée par $R_{P^*}^{(\varepsilon^*|k^*)}$.*

Remarquons que $R_P^{(-n|-n)}$ coïncide avec la transformée de Radon projective. Pour $U \subset P$ ouvert sous-analytique, on note par $\Gamma_{\mathrm{w}}(U;\mathcal{C}_P^\infty(\varepsilon|k))$ le sous-espace de $\Gamma(P;\mathcal{C}_P^\infty(\varepsilon|k))$ des fonctions nulles à l'ordre infini dans $P \setminus U$. L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(E)$ des fonctions rapidement décroissantes dans une carte affine $E \subset P$, s'identifie à $\Gamma_{\mathrm{w}}(E;\mathcal{C}_P^\infty(\varepsilon|k))$. Il est donc naturel de décrire l'image par $R_P^{(\varepsilon|k)}$ de $\Gamma_{\mathrm{w}}(E;\mathcal{C}_P^\infty(\varepsilon|k))$.

THÉORÈME 1.3. – *Soit $H = P \setminus E$ l'hyperplan à l'infini de E, notons $\xi_\circ \in P^*$ le point correspondant, et identifions l'espace tangent projectif à P^* en $\xi_\circ$ à un hyperplan $H^* \subset P^*$, avec $\xi_\circ \notin H^*$. Soit $\varphi \in \Gamma(P^*;\mathcal{C}_{P^*}^\infty(\varepsilon^*|k^*))$. Supposons $-n-1 < k < 0$. Alors il existe $f \in \Gamma_{\mathrm{w}}(E;\mathcal{C}_P^\infty(\varepsilon|k))$ telle que $\varphi = R_P^{(\varepsilon|k)} f$ si et seulement si :*

(i) *(le cas $\varepsilon^* \equiv 0$) pour tout entier non négatif m et pour tout $\xi' \in H^*$ les différentielles non-locales de φ en $\xi_\circ$ au sens de* [5] :

$$d_{\xi_\circ}^{(1|k^*+m+1)}\varphi(\xi') = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi_\circ + t\xi')\delta^{(1|k^*+m+1)}(t)dt \tag{1.2}$$

s'annulent.

(ii) *(le cas $\varepsilon^* \equiv 1$) φ appartient à $\Gamma_{\mathrm{w}}(P^* \setminus \{\xi_\circ\};\mathcal{C}_{P^*}^\infty(1|k^*))$, et satisfait la « condition de Cavalieri » : pour tout entier non négatif m et pour tout $\xi' \in H^*$, l'intégrale :*

$$c_{\xi_\circ}^{(0|m)}\varphi(\xi') = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s\xi_\circ + \xi')s^m ds \tag{1.3}$$

est un polynôme homogène de degré $m + k^* + 1$ en ξ'.

La partie (ii) de l'énoncé a été démontrée par exemple dans [4], p. 86, pour $k = -n$. La partie (i) pourrait aussi être démontrée par la même méthode, qui consiste à utiliser la formule d'inversion pour la transformée de Fourier. Ici notre approche est différente, et utilise la théorie des transformations intégrales pour les faisceaux et les $\mathcal{D}$-modules de [2], [3], [10] (*cf.* aussi [6] pour une approche voisine). En particulier, on verra que les conditions (1.2), (1.3) sont de nature géométrique (ou cohomologique), liée à la transformée de Radon projective complexe.

2. Transformations intégrales pour les faisceaux et les $\mathcal{D}$-modules

Soit X une variété analytique complexe, $\mathcal{O}_X$ son faisceau structural, Ω_X le faisceau des formes de degré maximal, et $\mathcal{D}_X$ le faisceau d'anneaux des opérateurs différentiels linéaires à coefficients holomorphes. Si $A \subset X$ est un sous-ensemble localement fermé, on note $\mathbb{C}_A$ le faisceau sur X, constant de fibre $\mathbb{C}$ sur A et zéro ailleurs. On note par $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_X)$ (resp., $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_X)$) la catégorie dérivée de la catégorie des complexes bornés de faisceaux de $\mathbb{C}$-vectoriels (resp., de $\mathcal{D}_X$-modules) sur X. Soit Y une autre variété analytique complexe. Pour $G \in \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_Y)$, $\mathcal{M} \in \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_X)$, $L \in \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{X\times Y})$, et $\mathcal{L} \in \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_{X\times Y})$, on pose :

$$\left\{\begin{array}{l} L \circ G = Rq_{1!}(L \otimes q_2^{-1}G), \\ \mathcal{M}\underline{\circ}\mathcal{L} = \underline{q_{2!}}(\underline{q_1^{-1}}\mathcal{M} \otimes^{L}_{\mathcal{O}_{X\times Y}} \mathcal{L}), \end{array}\right. \tag{2.1}$$

où $X \xleftarrow{q_1} X\times Y \xrightarrow{q_2} Y$ désignent les projections naturelles, et $Rq_{1!}$, q_2^{-1} (resp., $\underline{q_{2!}}$, $\underline{q_1^{-1}}$) désignent les opérations d'image directe propre et d'image inverse pour les faisceaux (resp., pour les $\mathcal{D}$-modules). On définit de la même façon $F \circ L$ pour $F \in \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_X)$.

On note $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{R}-c}(\mathbb{C}_X)$ la sous-catégorie triangulée pleine de $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_X)$ dont les objets sont à cohomologie $\mathbb{R}$-constructible. On dit qu'un $\mathcal{D}_X$-module $\mathcal{M}$ est quasi-good si, pour tout sous-ensemble relativement compact de X, il admet une filtration $\{\mathcal{M}_k\}$ par des $\mathcal{D}_X$-sous-modules cohérents, telle que tout quotient $\mathcal{M}_k/\mathcal{M}_{k-1}$ admette une bonne filtration, et $\mathcal{M}_k = 0$ pour $k \ll 0$. On note $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{q-good}}(\mathcal{D}_X)$ la sous-catégorie triangulée pleine de $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_X)$ dont les objets sont à cohomologie quasi-good. Pour $F \in \mathbf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{R}-c}(\mathbb{C}_X)$, les complexes $F \overset{\mathrm{w}}{\otimes} \mathcal{O}_X$ et $T\mathcal{H}om(F, \mathcal{O}_X)$ de cohomologie formelle et tempérée ont été définis dans [8], [10]. Le théorème suivant est l'analogue en cohomologie formelle d'une formule d'adjonction de [2]

THÉORÈME 2.1 ([10], theorem 10.8). – *Soient* $G \in \mathbf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{R}-c}(\mathbb{C}_Y)$ *et* $\mathcal{M} \in \mathbf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{q-good}}(\mathcal{D}_X)$. *Soit* $\mathcal{L} \in \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_{X\times Y})$ *holonome régulier, et posons* $L = R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X\times Y}}(\mathcal{L}, \mathcal{O}_{X\times Y})$. *Supposons que :*

$$\left\{\begin{array}{ll} (\mathrm{supp}(\mathcal{M}) \times Y) \cap \mathrm{supp}(\mathcal{L}) & \text{soit propre sur } Y, \\ (X \times \mathrm{supp}(G)) \cap \mathrm{supp}(L) & \text{soit propre sur } X. \end{array}\right.$$

Alors, on a un isomorphisme :

$$\mathrm{RHom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, (L \circ G) \overset{\mathrm{w}}{\otimes} \mathcal{O}_X)[d_X] \xrightarrow{\sim} \mathrm{RHom}_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}\underline{\circ}\mathcal{L}, G \overset{\mathrm{w}}{\otimes} \mathcal{O}_Y). \tag{2.2}$$

3. Transformation de Radon projective complexe

Soit $\mathbb{P}$ un espace projectif complexe de dimension n, $\mathbb{P}^*$ son espace projectif dual, et $[z]$, $[\zeta]$ des systèmes duaux de coordonnées homogènes. Soit $\mathbb{A} \subset \mathbb{P} \times \mathbb{P}^*$ la variété d'incidence définie par l'équation $\langle z, \zeta\rangle = 0$. Posons :

$$L = \mathbb{C}_{(\mathbb{P}\times\mathbb{P}^*)\setminus\mathbb{A}}, \qquad \mathcal{L} = T\mathcal{H}om(L, \mathcal{O}_{\mathbb{P}\times\mathbb{P}^*}).$$

Pour $k \in \mathbb{Z}$, on note $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(k)$ la $-k$-ième puissance tensorielle du fibré tautologique, et on pose $\mathcal{D}_{\mathbb{P}}(k) = \mathcal{D}_{\mathbb{P}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(k)$. La fonction méromorphe :

$$s_k(z, \zeta) = \frac{\omega(z)}{\langle z, \zeta\rangle^{n+1+k}},$$

considérée dans [11], définit une section de

$$\mathcal{L}^{(n,0)}(-k, k^*) = ((\Omega_{\mathbb{P}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-k)) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^*}(k^*)) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}\times\mathbb{P}^*}} \mathcal{L}.$$

THÉORÈME 3.1 ([3], theorem 4.3). – *Supposons $-n-1<k<0$. Alors, s_k induit un isomorphisme dans $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_{\mathbb{P}^*})$:*

$$\mathcal{D}_{\mathbb{P}^*}(-k^*)\tilde{\to}\mathcal{D}_{\mathbb{P}}(-k)\underline{\circ}\mathcal{L}.$$

Soit $F\in\mathbf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{R}-c}(\mathbb{C}_{\mathbb{P}})$. Comme corollaire des théorèmes 2.1 et 3.1, pour $-n-1<k<0$ on obtient un isomorphisme induit par s_k :

$$\mathrm{R}\Gamma(\mathbb{P};F\overset{\mathrm{w}}{\otimes}\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(k))\tilde{\to}\mathrm{R}\Gamma(\mathbb{P}^*;(F\circ L)\overset{\mathrm{w}}{\otimes}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^*}(k^*))[n]. \tag{3.3}$$

4. Esquisse de la preuve du théorème 1.3

Soient P et P^* les espaces projectifs réels dont $\mathbb{P}$ et $\mathbb{P}^*$ sont les complexifiés linéaires. Supposons par simplicité $n>2$. Puisque $\pi_1(P)=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, il y a essentiellement deux faisceaux localement constants de rang un sur P : le faisceau constant $\mathbb{C}_P$, qu'on notera $\mathbb{C}_P(0)$, et le fibré canonique, qu'on notera $\mathbb{C}_P(1)$. Pour $\varepsilon\in\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on pose $\varepsilon^*\equiv -n-1-\varepsilon$. Si F est un faisceau sur P, on pose $F(\varepsilon)=F\otimes\mathbb{C}_P(\varepsilon)$. D'après [3], proposition 5.16, $\mathbb{C}_P(\varepsilon)\circ L$ est isomorphe à $\mathbb{C}_{P^*}(\varepsilon^*)[-n]$, modulo faisceaux constants sur $\mathbb{P}^*$. Plus exactement, on a un isomorphime :

$$\mathbb{C}_P(\varepsilon)\circ L\simeq\mathbb{C}_{P^*}(\varepsilon^*)[-n]\qquad\text{dans } \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{\mathbb{P}^*};\dot{T}^*\mathbb{P}^*), \tag{4.1}$$

la catégorie localisée de $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{\mathbb{P}^*})$ en $\dot{T}^*\mathbb{P}^*$, le fibré conormal à $\mathbb{P}^*$ privé de la section nulle (*cf.* [9]). Avec les notations du théorème 1.3, l'immersion $H\hookrightarrow P$ induit par dualité une projection $P^*\setminus\{\xi_\circ\}\to H^*$, où H^* est un espace projectif réel de dimension $(n-1)$. Soit $q\colon\mathbb{P}^*\setminus\{\xi_\circ\}\to\mathbb{H}^*$ un complexifié de cette projection, et posons $Q^*=q^{-1}(H^*)$. Par un calcul explicite, on montre qu'on a les triangles distingués dans $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{\mathbb{P}^*};\dot{T}^*\mathbb{P}^*)$:

$$\mathbb{C}_E(0^*)\circ L\to\mathbb{C}_{P^*}(0)[-n]\to\mathbb{C}_{Q^*}(1)[1-n]\underset{+1}{\longrightarrow}, \tag{4.2}$$

$$\mathbb{C}_E(1^*)\circ L\to\mathbb{C}_{P^*\setminus\{\xi_\circ\}}(1)[-n]\to\mathbb{C}_{\overline{Q^*}}[1-n]\underset{+1}{\longrightarrow}, \tag{4.3}$$

où $\mathbb{C}_{Q^*}(1)=q^{-1}\mathbb{C}_{H^*}(1)$. Rappelons que, pour $k\in\mathbb{Z}$, $\varepsilon\in\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on a les isomorphismes :

$$\Gamma(P;\mathcal{C}^\infty_P(\varepsilon|k))\simeq\mathrm{R}\Gamma(\mathbb{P};\mathbb{C}_P(\varepsilon)\overset{\mathrm{w}}{\otimes}\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(k)),$$
$$\Gamma_{\mathrm{w}}(E;\mathcal{C}^\infty_P(\varepsilon|k))\simeq\mathrm{R}\Gamma(\mathbb{P};\mathbb{C}_E(\varepsilon)\overset{\mathrm{w}}{\otimes}\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(k)).$$

Pour $-n-1<k<0$, le foncteur $\mathrm{R}\Gamma(\mathbb{P}^*;(\cdot)\overset{\mathrm{w}}{\otimes}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^*}(k^*))$ est bien défini dans $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{R}-c}(\mathbb{C}_{\mathbb{P}^*};\dot{T}^*\mathbb{P}^*)$. Dans [3], on a retrouvé le théorème 1.2 comme corollaire de la formule (3.3) pour $F=\mathbb{C}_P(\varepsilon)$. Si on applique $\mathrm{R}\Gamma(\mathbb{P}^*;(\cdot)\overset{\mathrm{w}}{\otimes}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^*}(k^*))$ au triangle distingué :

$$\mathbb{C}_E(\varepsilon)\circ L\to\mathbb{C}_P(\varepsilon)\circ L\to\mathbb{C}_H(\varepsilon)\circ L\underset{+1}{\longrightarrow},$$

en utilisant les formules (4.1), (4.2), (4.3), et (3.3) on obtient les suites exactes courtes :

$$0\to R_P^{(0^*|k)}\Gamma_{\mathrm{w}}(E;\mathcal{C}^\infty_P(0^*|k))\longrightarrow\Gamma(P^*;\mathcal{C}^\infty_{P^*}(0|k^*))\xrightarrow[d_{\xi_\circ}^{(1|k^*+\cdot+1)}]{}\prod_{m\geq 0}\Gamma(H^*;\mathcal{C}^\infty_{H^*}(1|k^*+m+1))\to 0, \tag{4.4}$$

$$0\to R_P^{(1^*|k)}\Gamma_{\mathrm{w}}(E;\mathcal{C}^\infty_P(1^*|k))\longrightarrow\Gamma_{\mathrm{w}}(P^*\setminus\{\xi_\circ\};\mathcal{C}^\infty_{P^*}(1|k^*))\xrightarrow[c]{}H^1(\mathbb{P}^*;\mathbb{C}_{\overline{Q^*}}\overset{\mathrm{w}}{\otimes}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^*}(k^*))\to 0, \tag{4.5}$$

où $\mathbb{C}_{Q^*}(1) = q^{-1}\,\mathbb{C}_{H^*}(1)$. L'exactitude de (4.4) démontre la partie (i) du théorème 1.3. En appliquant le foncteur $\mathrm{R}\Gamma(\mathbf{P}^*; (\cdot) \overset{\mathrm{w}}{\otimes} \mathcal{O}_{\mathbf{P}^*}(k^*))$ au diagramme :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{C}_{Q^*} \arrow[r] & \mathbb{C}_{\overline{Q^*}} \arrow[r] & \mathbb{C}_{\xi_\circ} \arrow[r] & 0 \\
& \mathbb{C}_{P^*\setminus\{\xi_\circ\}} \arrow[u] \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

on voit que le morphisme c de (4.5) s'insère dans le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_{\mathbf{P}^*}\hat{|}_{\xi_\circ} \arrow[r, "t"] & \prod_{m\geq 0} \Gamma(H^*; \mathcal{C}^\infty_{H^*}(0|k^*+m+1)) \arrow[r] & H^1(\mathbb{P}^*; \mathbb{C}_{\overline{Q^*}} \overset{\mathrm{w}}{\otimes} \mathcal{O}_{\mathbf{P}^*}(k^*)) \arrow[r] & 0 \\
& & \Gamma_{\mathrm{w}}(P^* \setminus \{\xi_\circ\}; \mathcal{C}^\infty_{P^*}(1|k^*)) \arrow[u, "c^{(0|\cdot)}_{\xi_\circ}"] \arrow[ur, "c"'] & &
\end{tikzcd}$$

Une section de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^*}\hat{|}_{\xi_\circ}$ est une série formelle $\sum_m \psi_m$, où les ψ_m sont des polynômes homogènes de degré m. On vérifie alors que $t(\sum_m \psi_m) = \sum_m \psi_{k^*+m+1}$. Ceci démontre la partie (ii) du théorème 1.3.

5. Commentaires et remarques

La surjectivité du morphisme c dans (4.5) démontre un théorème de Borel pour les différentielles non-locales. Par des méthodes analogues on pourrait obtenir d'autres résultats, comme le théorème des supports d'Helgason, ou une description de l'image de la transformée de Radon conforme.

Les résultats de cette Note sont développés dans la prépublication [1].

Remerciements. Il nous est agréable de remercier ici Masaki Kashiwara pour de nombreuses conversations utiles sur ce sujet.

Note remise et acceptée le 16 septembre 1996.

Références bibliographiques

[1] **D'Agnolo A., Janvier 1996.** Nonlocal differentials, Radon transform, and Cavalieri condition: a cohomological approach, *Prépublication*, Univ. Paris-VI et Paris-VII.

[2] **D'Agnolo A. et Schapira P., 1994, 1996.** La transformée de Radon-Penrose des $\mathcal{D}$-modules, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 319, série I, p. 461-466; The Radon-Penrose transform for $\mathcal{D}$-modules, *J. Funct. Anal.*, 139, p. 349-382.

[3] **D'Agnolo A. et Schapira P., 1994, 1996.** Quantification de Leray de la dualité projective, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 319, série I, p. 595-598; Leray's quantization of projective duality, *Duke Math. J.*, 84, p. 453-496.

[4] **Gelfand I. M., Gindikin S. G. et Graev M.I., 1982.** Integral geometry in affine and projective spaces, *J. Soviet Math.*, 18, p. 39-167.

[5] **Gelfand I. M. et Smirnov M. M., 1994.** Lagrangians satisfying Crofton formulas, Radon transforms, and nonlocal differentials, *Adv. in Math.*, 109, p. 188-227.

[6] **Goncharov A., 1995.** Integral geometry and D-modules, *Math. Res. Lett.*, 2, p. 415-435.

[7] **Helgason S., 1980.** The Radon transform, *Progress in Math.*, n° 5, Birkhäuser.

[8] **Kashiwara M., 1984.** The Riemann–Hilbert problem for holonomic systems, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 20, n° 2, p. 319-365.

[9] **Kashiwara M. et Schapira P., 1990.** Sheaves on manifolds, *Grundlehren math. Wiss.*, n° 292, Springer.

[10] **Kashiwara M. et Schapira P., 1996.** Moderate and formal cohomology associated with constructible sheaves, *Mém. Soc. Math. France* (N.S.), 123, n° 63.

[11] **Leray J., 1959.** Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe (problème de Cauchy III), *Bull. Soc. Math. France*, 87, p. 81-180.