DOMAINE D'EXISTENCE POUR LE PROBLÈME DE CAUCHY EN THÉORIE DES FAISCEAUX

Andrea D'Agnolo

1. Introduction. Soit Y une variété analytique complexe, connexe, paracompacte et non compacte. On pose $X = Y \times \mathbf{C}$, $Y_0 = Y \times \{0\}$. Soit P un opérateur différentiel holomorphe dans X au voisinage de Y_0. Dans [H-L-T] Hamada, Leray et Takeuchi construisent un ouvert U "maximal" tel que la solution du problème de Cauchy holomorphe pour P à données sur Y_0 se prolonge à U.

A la lumière de la méthode géométrique qu'ils ont développée, on propose dans ce travail une version faisceautique de leur théorème qui aura en particulier l'avantage de s'appliquer aux systèmes généraux d'équations aux dérivées partielles.

On se placera dans la situation suivante. Soit Y une variété réelle de classe C^∞, connexe, paracompacte et non compacte. On pose $X = Y \times \mathbf{R}^n$ et $Y_0 = Y \times \{0\}$. On note $\pi_X : T^*X \to X$ le fibré cotangent à X et $T^*_X X$ sa section nulle. Soit F un objet de la catégorie dérivée des faisceaux sur X. On note $SS(F)$ son micro-support (cf. [K-S 1, 2]), un sous ensemble fermé, conique et involutif de T^*X.

(a) Sous l'hypothèse:

$$SS(F) \cap (Y \times T^*_0 \mathbf{R}^n) \subset T^*_X X,$$

on montre qu'il existe un système fondamental de voisinages U de Y_0 dans X tel que le morphisme naturel:

$$R\Gamma(U; F) \to R\Gamma(Y_0; F) \tag{1.1}$$

soit un isomorphisme.

(b) Sous l'hypothèse:

$$SS(F) \cap (Y \times T^* \mathbf{R}^n) \subset T^*_X X,$$

on explicite un voisinage U de Y_0 "aussi grand que possible" tel que la flèche (1.1) soit un isomorphisme.

Ces résultats s'appliquent à l'étude du problème de Cauchy holomorphe de la manière suivante.

Soit Y une variété analytique complexe, connexe, paracompacte et non compacte. On pose $X = Y \times \mathbf{C}^m$ et $Y_0 = Y \times \{0\}$. On note $\mathcal{O}_X$ et $\mathcal{D}_X$ les faisceaux des fonctions holomorphes et des opérateurs différentiels sur X, respectivement. Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_X$-module cohérent tel que Y_0 soit non caractéristique pour $\mathcal{M}$, le résultat faisceautique (a) appliqué au complexe:

$$F = R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) \tag{1.2}$$

Appeared in: J. Math. Pures Appl. (9) **72** (1993), no. 1, 1–13.

des solutions holomorphes du système $\mathcal{M}$, permet d'étendre holomorphiquement à une famille de voisinages de Y_0 la solution du problème de Cauchy pour $\mathcal{M}$ à données sur Y_0.

Si $Y \times \{z\}$ est non caractéristique pour $\mathcal{M}$ pour tout $z \in \mathbf{C}^m$, le résultat (b) se traduit aussi en terme d'extension de la solution du problème de Cauchy.

On note que la technique utilisée dans la preuve des résultats (a) et (b) est purement réelle et n'utilise pas la théorie des équations aux dérivées partielles. Elle s'appuie sur la théorie microlocale des faisceaux de Kashiwara et Schapira et permet de traiter le problème de Cauchy en toute codimension pour les systèmes.

On remarque cependant que si l'on prend $X = Y \times \mathbf{C}$, $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X P$ (P étant un opérateur différentiel), et F comme dans (1.2), on ne retrouve ainsi qu'une version affaiblie du théorème de [H-L-T]. Cela est dû au fait que ces auteurs utilisent des résultats de géométrie Riemannienne spécifiques à la dimension complexe 1.

2. Une borne pour des sous-ensembles du fibré cotangent. Soient Y et Z deux variétés réelles de classe C^∞, connexes, paracompactes et non compactes. On pose $X = Y \times Z$. On note $\pi_X : T^*X \to X$ le fibré cotangent à X et $T^*_X X$ sa section nulle. On note $(y;\eta)$ (resp. $(z;\zeta)$, resp. $(x;\xi)$) un point de T^*Y (resp. T^*Z, resp. T^*X). On identifiera dans la suite T^*X et $T^*Y \times T^*Z$.

On rappelle que l'hypothèse de paracompacité équivaut à l'existence d'une métrique Riemannienne (de classe C^∞).

Notations 2.1. Si X est une variété Riemannienne, r sa métrique, et si v, w sont deux sections du fibré tangent à X, on note $\langle r, v \otimes w\rangle$ le produit scalaire induit par r. Si $(x;\xi) \in T^*X$, on note $|\xi|_r$ la norme de ξ induite par la métrique r. On note $\mathrm{dist}_r(\cdot,\cdot)$ la fonction distance induite sur X par r.

Soient $(x_1,\dots,x_n)$ des coordonnées locales au voisinage de $x \in X$. On dit que les coordonnées $(x_1,\dots,x_n)$ sont des coordonnées normales pour r si $(\partial/\partial x_1,\dots,\partial/\partial x_n)$ forment une base orthonormale de T_xX pour la norme $|\cdot|_r$.

La proposition suivante paraphrase, dans un contexte un peu plus général, un résultat de [H-L-T].

Proposition 2.2. *Soient $\widetilde{X}$ un sous-ensemble ouvert de X et Λ un sous-ensemble fermé et conique de T^*X tels que pour un voisinage ouvert $\hat{X}$ de l'adhérence de $\widetilde{X}$ on ait:*

$$\pi_X^{-1}(\hat{X}) \cap \Lambda \cap (Y \times T^*Z) \subset T^*_X X. \tag{2.1}$$

Alors pour toute métrique r sur Z, il existe une métrique s sur Y et une fonction $\rho : Z \to \mathbf{R}_{\geq 0}$ localement bornée, telles que posant:

$$V(\widetilde{X}, r, s, \rho) = \{(y,z;\eta,\zeta); (y,z) \in \widetilde{X}, |\zeta|_r > \rho(z)|\eta|_s\}, \tag{2.2}$$

on ait:

$$\Lambda \cap V(\widetilde{X}, r, s, \rho) = \emptyset.$$

preuve. L'adhérence d'un sous-ensemble relativement compact de $\widetilde{X}$ est un sous-ensemble compact de $\hat{X}$. L'hypothèse (2.1) entraîne donc que la projection $\pi_X^{-1}(\widetilde{X}) \to (T^*Y \times Z) \cap \pi_X^{-1}(\widetilde{X})$ est propre sur Λ. Par suite la fonction:

$$\begin{aligned} \widetilde{\rho} : & T^*Y \times Z \to \mathbf{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\} \\ & ((y;\eta), z) \mapsto \sup\ \{|\zeta|_r; (y,z) \in \widetilde{X}, (y,z;\eta,\zeta) \in \Lambda\}, \end{aligned}$$

est localement bornée (ici on pose $\sup \emptyset = 0$).

Soit $\overline{Y} = Y \cup \{\infty\}$ une compactification de Y par l'adjonction d'un “point à l'infini”. Puisque Y est paracompacte, on peut trouver des fonctions $\varphi : Y \to \mathbf{R}_{>0}$ de classe C^∞ telles que:

$$\lim_{y \to \infty} \varphi(y) = 0. \tag{2.3}$$

Soit $\widetilde{s}$ une métrique Riemannienne sur Y.

On peut alors choisir une fonction φ de classe C^∞ comme dans (2.3) décroissante à l'infini suffisamment vite afin que si l'on pose $s = \varphi\widetilde{s}$, alors la fonction:

$$\begin{aligned} \rho : & Z \to \mathbf{R}^+ \cup \{+\infty\} \\ & z \mapsto \sup\ \{\widetilde{\rho}(y, \eta, z); (y, z) \in \widetilde{X}, |\eta|_s = 1\}, \end{aligned}$$

soit localement bornée. C.Q.F.D.

3. Résultats préliminaires. On utilisera dans la suite les outils de la théorie microlocale des faisceaux de [K-S 1, 2].

Soit X une variété réelle de classe C^∞. On note $D^b(X)$ la catégorie dérivée de la catégorie de complexes bornés de faisceaux de groupes abéliens sur X. Si F est un objet de $D^b(X)$, on lui associe son micro-support $SS(F)$, un sous-ensemble fermé, conique et involutif de T^*X.

Définition 3.1. Soit A un sous-ensemble de X et $x \in X$.

(i) On note $N_x(A)$ l'ensemble des $\theta \in T_xX$, $\theta \neq 0$ tels que, dans une carte au voisinage de x, il existe un cône ouvert $\gamma \ni \theta$ et un voisinage $U \ni x$ avec:

$$U \cap ((A \cap U) + \gamma) \subset A.$$

(ii) On note $N_x^*(A) = \{\eta \in T_x^*X; \langle \eta, \theta \rangle \geq 0, \forall \theta \in N_x(A)\}$, le polaire de $N_x(A)$.

(iii) On note $N(A) = \cup_{x \in X} N_x(A)$, $N^*(A) = \cup_{x \in X} N_x^*(A)$.

On a les relations évidentes:

Lemme 3.2. Soient A et B deux sous-ensembles de X et $x \in X$. Alors:

(i) $N_x^*(X \setminus A) = N_x^*(A)^a$, où a désigne l'application antipodale,

(ii) $N_x^*(A \cup B) \subset N_x^*(A) + N_x^*(B)$,

(iii) $N_x^*(A \cap B) \subset N_x^*(A) + N_x^*(B)$,

En combinant la Proposition 2.7.2 et le Corollaire 5.4.9 de [K-S 2], on peut énoncer le résultat de propagation suivant.

Proposition 3.3. *Soit $F \in Ob(D^b(X))$ et soit $\{U_t\}_{t \in \mathbf{R}}$ une famille de sous-ensembles ouverts de X. On suppose:*

(i) *$U_t = \cup_{s<t} U_s$, pour chaque $t \in \mathbf{R}$,*

(ii) *pour chaque couple (s,t) avec $s \leq t$, l'ensemble $\overline{U_t \setminus U_s} \cap \mathrm{supp}(F)$ est compact,*

(iii) *Posant $Z_s = \overline{\cap_{t>s}(U_t \setminus U_s)}$, pour chaque couple (s,t) avec $s \geq t$, et pour tout $x \in Z_s \setminus U_t$ on a $N_x^*(U_t) \neq T_x^*X$ et $SS(F) \cap N_x^*(U_t)^a \subset T_X^*X$.*

Alors, pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a l'isomorphisme canonique:

$$R\Gamma(\cup_s U_s; F) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(U_t; F).$$

Définition 3.4. On appelle cône normal d'une fonction $\varphi : X \to \mathbf{R}$ en $\overline{x} \in X$ l'ensemble $N_{\overline{x}}(\varphi) = N_{\overline{x}}(\{x; \varphi(x) \geq \varphi(\overline{x})\})$. On appelle cône conormal de φ en $\overline{x} \in X$ le polaire de $N_{\overline{x}}(\varphi)$, et on le note $N^*_{\overline{x}}(\varphi)$.

On peut donner l'extension suivante du lemme de Morse microlocal [K-S 2, Lemma 5.4.17].

Proposition 3.5. *Soit $F \in Ob(D^b(X))$ et soit $\varphi : X \to \mathbf{R}$ une fonction continue. On suppose:*

(i) *$supp(F) \cap \overline{\varphi^{-1}(t)}$ est compact pour tout $t \in \mathbf{R}$,*
(ii) *$N^*_x(\varphi) \neq T^*_x X$ et $N^*_x(\varphi) \cap SS(F) \subset T^*_X X$ pour tout x avec $a \leq \varphi(x) < b$.*

Alors on a:

$$\begin{aligned} R\Gamma(\varphi^{-1}(]-\infty, b[); F) &\xrightarrow{\sim} R\Gamma(\varphi^{-1}(]-\infty, a]); F) \\ &\xrightarrow{\sim} R\Gamma(\varphi^{-1}(]-\infty, a[); F). \end{aligned}$$

preuve. Pour tout $a \leq s < b$ on a

$$\begin{aligned} (R\Gamma_{\{t \geq s\}} R\varphi_* F)_s &\cong (R\varphi_* R\Gamma_{\{\varphi(x) \geq s\}} F)_s \\ &\cong R\Gamma(\varphi^{-1}(s); R\Gamma_{\{\varphi(x) \geq s\}} F) = 0, \end{aligned}$$

où la dernière égalité résulte de l'hypothèse (ii) grâce à [K-S 2, Cor. 5.4.9]. On a donc, d'après la définition du micro-support, $SS(R\varphi_* F) \cap \{(t, \tau) \in T^*\mathbf{R}; a < t < b\} \subset \{(t, \tau) \in T^*\mathbf{R}; \tau \leq 0\}$. La preuve est ensuite celle de loc. cit. C.Q.F.D.

4. Problème de Cauchy au voisinage de la variété des données. Soit Y une variété réelle de classe C^∞, connexe, paracompacte et non compacte. On pose $X = Y \times \mathbf{R}^n$ et $Y_0 = Y \times \{0\}$.

Théorème 4.1. *Soit $F \in Ob(D^b(X))$ tel que:*

$$SS(F) \cap (Y \times T^*_0 \mathbf{R}^n) \subset T^*_X X. \tag{4.1}$$

Il existe alors un système fondamental de voisinages U de Y_0 dans X tel que le morphisme naturel:

$$R\Gamma(U; F) \to R\Gamma(Y_0; F)$$

soit un isomorphisme.

Soit s une métrique sur Y. On aura besoin dans la preuve des deux lemmes suivants.

Lemme 4.2. *Pour toute fonction continue $\psi : Y \to \mathbf{R}_{>0}$ il existe une fonction continue $\varphi : \mathbf{R} \times Y \to \mathbf{R}_{\geq 0}$, de classe C^∞ en Y et telle que:*

(i) *$\varphi(t, y) = 0$ pour tout $t \leq 0$,*
(ii) *pour tout $y \in Y$ il existe $t \in \mathbf{R}$ avec $\varphi(t, y) \neq 0$,*
(iii) *$\varphi(t, y) \geq \varphi(t', y)$ pour tout $t > t'$,*
(iv) *$|\mathrm{d}_y \varphi(t, y)|_s < \psi(y)$ pour tout t, y avec $\varphi(t, y) \neq 0$,*
(v) *pour tout $t \in \mathbf{R}$ le support de la fonction $y \mapsto \varphi(t, y)$ est compact.*

preuve. La variété Y étant paracompacte et non-compacte, il existe une suite exhaustive de compacts K_p, $p \in \mathbf{N}$, de Y avec $K_p \subset \mathrm{int}(K_{p+1})$ et une famille φ_p, $p \in \mathbf{N}$, de fonctions de classe C^∞ à valeurs positives avec:

$$\tag{4.2} \begin{cases} 0 \leq \varphi_p(y) \leq 1, & \text{pour tout } y \in Y, \\ \varphi_p(y) = 0, & \text{pour } y \in K_{p-2} \text{ ou } y \notin K_{p+1}, \\ \varphi_p(y) = 1, & \text{pour } y \in K_p \setminus K_{p-1}, \end{cases}$$

(ici on pose $K_p = \emptyset$ pour $p < 0$). On remarque que ces conditions entraînent que pour $m \neq p$, $|m-p| \neq 2$ et pour tout $y \in Y$, on a que $\mathrm{d}_y\varphi_m \neq 0$ entraîne $\mathrm{d}_y\varphi_p = 0$.

Les ensembles $\mathrm{supp}(\varphi_p)$ étant compacts, il existe des nombres positifs α_p tels que $|\alpha_p \mathrm{d}\varphi_p(y)|_s < \frac{1}{2}\psi(y)$ pour tout $y \in Y$.

On pose alors:

$$\tag{4.3} \varphi(t,y) = \begin{cases} 0, & \text{pour } t < 0, \\ \alpha_0 t \varphi_0(y), & \text{pour } 0 \leq t \leq 1, \\ \varphi(p,y) + (t-p)\alpha_{p+1}\varphi_{p+1}(y), & \text{pour } t \in]p, p+1], p \in \mathbf{N}_{>0}. \end{cases}$$

C.Q.F.D.

Lemme 4.3. *Pour tout couple de fonctions continues $\widetilde{f}, \psi : Y \to \mathbf{R}_{>0}$, il existe une fonction $f : Y \to \mathbf{R}_{>0}$ de classe C^∞ avec $f(y) < \widetilde{f}(y)$ et $|df(y)|_s < \psi(y)$ pour tout $y \in Y$.*

preuve. Soit $\hat{f} : Y \to \mathbf{R}_{>0}$ une fonction de classe C^∞ telle que $\hat{f} \leq \widetilde{f}$.

Soit φ_p la famille définie par (4.2). Il existe des nombres $\alpha_p > 0$ tels que $\sum \alpha_p \varphi_p(y) < 1$ et $|\alpha_p \mathrm{d}(\varphi_p \hat{f}(y))|_s < \frac{1}{2}\varphi(y)$ pour tout $y \in Y$. On pose alors $f(y) = \sum \alpha_p \varphi_p(y) \hat{f}(y)$. C.Q.F.D.

preuve du Théorème 4.1. Si $h : Y \to \mathbf{R}_{>0}$ est une fonction continue, on pose:

$$U_h = \{(y,z) \in X; |z| < h(y)\}.$$

La famille des U_h forme un système fondamental de voisinages de Y_0 dans X et donc il existe une fonction $\hat{h}$ telle que (4.1) implique:

$$\pi_X^{-1}(U_{\hat{h}}) \cap SS(F) \cap (Y \times T^*\mathbf{R}^n) \subset T^*_X X.$$

On peut alors appliquer la Proposition 2.2 pour le choix $h = \frac{1}{2}\hat{h}$, $\hat{X} = U_{\hat{h}}$, $\widetilde{X} = U_h$, $\Lambda = SS(F)$, r la métrique euclidienne sur $\mathbf{R}^n$. Pour s, ρ comme dans cette proposition, on pose $V = V(U_h, r, s, \rho)$.

On choisit une fonction continue $\psi : Y \to \mathbf{R}_{>0}$ avec:

$$\tag{4.4} \psi(y) < \inf\{\rho^{-1}(z); |z| < h(y)\},$$

(on rappelle que la fonction ρ est localement bornée). Soit φ la fonction définie par le Lemme 4.2 pour ce choix de ψ (on peut évidemment supposer qu'on ait $\varphi(t,y) < h(y)$ pour tout t, y). On définit $\varphi_\infty : Y \to \mathbf{R}_{>0}$ par $\varphi_\infty(y) = \lim_{t\to\infty} \varphi(t,y)$ (c'est une fonction de classe C^∞ sur Y car, $\overline{y} \in Y$ étant fixé, la fonction $\varphi(t, \overline{y})$ est constante pour $t >> 1$).

On pose:

$$\Phi = \{f : Y \to \mathbf{R}_{>0};\ f \text{ est de classe } C^\infty,\ f < \varphi_\infty,\\ \mathrm{d}_x(|z| - f(y)) \in V \text{ pour } |z| \leq f(y)\}. \tag{4.5}$$

On va montrer que la famille $\{U_f\}_{f\in\Phi}$ satisfait la conclusion du Théorème 4.1.

(a) On montre que les U_f, $f \in \Phi$, forment un système fondamental de voisinages de Y_0 dans X.

Si $U \supset Y_0$ est un ouvert, il est facile de construire une fonction continue $\widetilde{f} : Y \to \mathbf{R}_{>0}$ avec $\widetilde{f} < \varphi_\infty$ et telle que $U_{\widetilde{f}} \subset U$. Si f est la fonction donnée par le Lemme 4.3 pour ce choix de $\widetilde{f}$ et pour ψ comme dans (4.4), on a alors $Y_0 \subset U_f \subset U$, $f \in \Phi$.

(b) Comme pour tout j:

$$H^j(Y_0; F) \xleftarrow{\sim} \varinjlim_{U \supset Y_0} H^j(U; F)$$

(où U parcourt la famille des voisinages ouverts de Y_0 dans X), et comme la famille $\{U_f\}_{f\in\Phi}$ est cofinale, il suffit de montrer les isomorphismes:

$$R\Gamma(U_f; F) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(U_g; F), \tag{4.6}$$

pour tout $f, g \in \Phi$ avec $f > g$.

(c) On va maintenant appliquer la Proposition 3.3 pour montrer l'isomorphisme (4.6). On pose:

$$\begin{aligned}
V' &= \{(y, z; \eta, \zeta) \in T^*X; (y, z) \in U_h,\ z \neq 0,\ -\langle z/|z|, \zeta\rangle > \rho(z)|\eta|_s\},\\
W_t &= \{(y, z) \in X; |z| < \varphi(t, y)\},\\
U_t &= U_g \cup (U_f \cap W_t).
\end{aligned}$$

L'hypothèse (i) est une conséquence de la continuité de φ.

D'après (v) du Lemme 4.2 on voit que W_t est relativement compact et donc la condition (ii) de la Proposition 3.3 est aisément vérifiée.

L'ensemble V' est à fibres convexes et on a $V' \subset V$. Dès que $f, g \in \Phi$, on a $\dot{N}^*(U_\cdot) \subset V'$ pour $\cdot = f, g$, où $\dot{N}^*(\cdot) := N^*(\cdot) \setminus T^*_X X$. L'hypothèse (iv) du Lemme 4.2 nous donne $\dot{N}^*(W_t) \subset V'$. Par le Lemme 3.2 on a donc $\dot{N}^*(U_t) \subset \dot{N}^*(W_t) + \dot{N}^*(U_f) + \dot{N}^*(U_g) \subset V' + V' + V' \subset V' \subset V$, ce qui entraîne la condition (iii) de la Proposition 3.3

L'isomorphisme (4.6) en résulte. C.Q.F.D.

Remarque 4.4. Soit X une variété réelle de classe C^∞ connexe, paracompacte et non compacte. Soit Y une sous-variété connexe de X. On note $T^*_Y X$ le fibré conormal à Y dans X. Par une méthode de déformation non-caractéristique un peu plus compliquée que celle de la preuve du Théorème 4.1, on aurait pu énoncer le résultat plus général:

Soit $F \in Ob(D^b(X))$ tel que:

$$SS(F) \cap T^*_Y X \subset T^*_X X. \tag{4.1'}$$

Il existe alors un système fondamental de voisinages U de Y dans X tel que le morphisme naturel:

$$R\Gamma(U; F) \to R\Gamma(Y; F)$$

soit un isomorphisme.

5. Solution maximale. Soient Y une variété réelle de classe C^∞, connexe, paracompacte et non compacte. On pose $X = Y \times \mathbf{R}^n$ et $Y_0 = Y \times \{0\}$.

On munit $\mathbf{R}^n$ d'une métrique Riemannienne r (non nécessairement la métrique euclidienne). Soit s une métrique sur Y et $\rho : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}_{\geq 0}$ une fonction localement Lipschitz. Pour $z \in \mathbf{R}^n$, on note $\gamma_z : [0,1] \to \mathbf{R}^n$ le rayon défini par $\gamma_z(t) = t\,z$. Avec les notations 2.1, on pose:

$$\begin{aligned} f(y) &= \mathrm{dist}_s(y, \infty), \\ g(z) &= \int_0^1 \rho(\gamma_z(t)) \langle r, \dot\gamma_z(t) \otimes \dot\gamma_z(t) \rangle^{\frac{1}{2}} dt. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Pour $f : Y \to \mathbf{R}$, $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ fonctions continues, on pose:

$$U_{g,f} = \{(y,z) \in X; g(z) < f(y)\}. \tag{5.2}$$

Théorème 5.1. *Soit $F \in Ob(D^b(X))$ tel que:*

$$SS(F) \cap (Y \times T^*\mathbf{R}^n) \subset T^*_X X.$$

Soit r une métrique Riemannienne sur $\mathbf{R}^n$. Soient s la métrique Riemannienne sur Y et $\widetilde{\rho}$ la fonction localement bornée sur Z données par la Proposition 2.1 pour ce choix de la métrique r et pour $\hat{X} = \widetilde{X} = X$, $\Lambda = SS(F)$. Alors pour toute fonction localement Lipschitz $\rho \geq \widetilde{\rho}$ et pour f, g définies comme dans (5.1), le morphisme naturel:

$$R\Gamma(U_{g,f}; F) \to R\Gamma(Y_0; F) \tag{5.3}$$

est un isomorphisme.

Remarque 5.2. Le nombre $g(z)$ est la longueur du rayon γ_z pour la métrique $\rho^2 r$. L'ouvert $U_{g,f}$ du théorème sera alors d'autant plus grand que ρ est proche de $\widetilde{\rho}$ et que les rayons γ_z sont proches des géodésiques pour la métrique $\rho^2 r$.

On aura besoin du lemme suivant.

Lemme 5.3. *Soit r une métrique Riemannienne sur $\mathbf{R}^n$, $\rho : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}_{>0}$ une fonction de classe C^∞ et g la fonction définie dans (5.1) pour ce choix de r et ρ. Pour tout $0 \neq \overline{z} \in \mathbf{R}^n$ il existe des coordonnées $z = (z_1, z')$ normales pour r au voisinage de $\overline{z}$ telle que pour tout $0 < \varepsilon < 1$ il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que:*

$$g(z) < g(\widetilde{z}) - \varepsilon \rho(\overline{z})(\widetilde{z}_1 - z_1),$$

pour tout $z, \widetilde{z} \in B(\overline{z}, \delta_\varepsilon)$ avec $|\widetilde{z}' - z'| < \delta_\varepsilon(\widetilde{z}_1 - z_1)$.

(Ici $|\cdot|$ note la norme euclidienne associée au choix de coordonnées et $B(\overline{z}, \delta)$ note la boule de centre $\overline{z}$ et rayon δ.)

preuve. On peut choisir une carte locale en $\overline{z}$ et des coordonnées normales $z = (z_1, z')$ telles que z_1 soit la longueur du rayon γ_z pour la métrique r. On vérifie les assertions suivantes:

(1) il existe $l > 0$ et $\delta_1 > 0$ avec $|g(z) - g(\widetilde{z})| < l|z - \widetilde{z}|$ pour tout $z, \widetilde{z} \in B(\overline{z}, \delta_1)$,
(2) pour tout $0 < \overline{\varepsilon} < 1$ il existe $\delta_2 > 0$ tel que $g(z) < g(\widetilde{z}) - \overline{\varepsilon}\rho(\overline{z})(\widetilde{z}_1 - z_1)$ pour tout $z, \widetilde{z} \in B(\overline{z}, \delta_2)$ avec $z' = \widetilde{z}'$.

On a alors

$$\begin{aligned} g(z) &< g(z_1, \widetilde{z}') + l|\widetilde{z}' - z'| \\ &< g(\widetilde{z}) - \overline{\varepsilon}\rho(\overline{z})(\widetilde{z}_1 - z_1) + l|\widetilde{z}' - z'| \\ &< g(\widetilde{z}) - \varepsilon\rho(\overline{z})(\widetilde{z}_1 - z_1) \end{aligned}$$

pour tout couple z, $\widetilde{z}$ satisfaisant:

$$\begin{cases} z, \widetilde{z} \in B(\overline{z}, \delta_\varepsilon), \\ |\widetilde{z}' - z'| < \delta_\varepsilon(z_1 - \widetilde{z}_1), \end{cases}$$

où $0 < \varepsilon < \overline{\varepsilon} < 1$, $0 < \delta_\varepsilon < \min\{\delta_1, \delta_2, l^{-1}(\overline{\varepsilon} - \varepsilon)\rho(\overline{z})\}$. C.Q.F.D.

preuve du Théorème 5.1. On va diviser la preuve en plusieurs parties.

(a) Grâce au Théorème 4.1, il existe $h \in \Phi$ comme dans (4.5) avec $Y_0 \subset U_h \subset U_{g,f}$ et $R\Gamma(U_h; F) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(Y_0; F)$. Le morphisme (5.3) se factorise par ce dernier isomorphisme et donc (5.3) est un isomorphisme si et seulement si $R\Gamma(U_{g,f}; F) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(U_h; F)$. Si l'on pose $F_h = R\Gamma_{X\setminus U_h} F$, il suffit alors de montrer:

$$R\Gamma(U_{g,f}; F_h) = 0. \tag{5.4}$$

(b) Soit $\{K_p\}_p$, $p \in \mathbf{N}$ une famille exhaustive de compacts de Y à bord C^∞, avec $K_p \subset \mathrm{Int}(K_{p+1})$. Soit $\rho_p : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}_{>0}$, $p \in \mathbf{N}$, $\rho_p(z) > \rho(z)$ pour tout $z \in \mathbf{R}^n$, une famille décroissante de fonctions C^∞ convergentes vers ρ uniformément. On pose:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_p^\infty &= \begin{cases} p, & \text{si } \mathrm{dist}_r(0,\infty) = +\infty, \\ \mathrm{dist}_r(0,\infty) - 1/p, & \text{autrement,} \end{cases} \\ \hat{f}_p(y) &= \begin{cases} \mathrm{dist}_s(y, \partial K_p), & \text{pour } y \in K_p, \\ 0, & \text{autrement,} \end{cases} \\ f_p(y) &= \inf\{\hat{f}_p(y), \mathrm{d}_p^\infty\}, \\ g_p(z) &= \int_0^1 \rho_p(\gamma_z(t)) \langle r, \dot{\gamma}_z(t) \otimes \dot{\gamma}_z(t)\rangle^{\frac{1}{2}} dt \end{aligned}$$

Les U_{g_p,f_p}, $p \in \mathbf{N}$ forment une famille croissante d'ouverts relativement compacts dans X tels que $\cup_p U_{g_p,f_p} = U_{g,f}$.

Si on a

$$R\Gamma(U_{g_p,f_p}; F_h) = 0, \quad \text{pour tout } p, \tag{5.5}$$

d'après le procédé de Mittag-Leffler, on a aussi que $R\Gamma(U_{g,f}; F_h) \cong \varprojlim_p R\Gamma(U_{g_p,f_p}; F_h) = 0$. Il suffit donc de montrer (5.5).

(c) On définit $\varphi_p : X \to \mathbf{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ par $\varphi_p(y,z) = g_p(z)/f_p(y)$.

Pour $\alpha > 0$ suffisamment petit, on a $\varphi_p^{-1}(]-\infty, \alpha]) \subset U_h$. On a aussi $\varphi_p^{-1}(]-\infty, 1[) = U_{g_p,f_p}$. Pour montrer (5.5) il suffit alors de vérifier qu'on peut appliquer la Proposition 3.5 pour le choix $\varphi = \varphi_p$, $a = \alpha$, $b = 1$, $F = F_h$.

L'hypothèse (i) est évidemment vérifiée. On est alors ramenés à montrer que:

$$\begin{cases} N_x^*(\varphi_p) \neq T_x^* X, \quad N_x^*(\varphi_p) \cap SS(F_h) \subset T_X^* X, \\ \text{pour tout } x \in X \text{ avec } \alpha \leq \varphi_p(x) < 1. \end{cases} \tag{5.6}$$

Soient:

$$\begin{cases} \hat{\varphi}_p(y,z) = g_p(z)/\hat{f}_p(y), \\ \widetilde{\varphi}_p(y,z) = g_p(z)/\mathrm{d}_p^{\infty}, \\ V = V(X,\rho,r,s), \end{cases}$$

où $V(X,\rho,r,s)$ est l'ensemble défini par (2.2).

Soit $\overline{x} = (\overline{y},\overline{z}) \in X$ avec $\varphi_p(\overline{x}) = c$, $\alpha \leq c < 1$. On peut alors choisir une carte locale et des coordonnés $(x) = (y,z)$ dans X au voisinage de $\overline{x}$ normales pour $s \times r$, telles que:

(i) $(z) = (z_1, z')$ soient les coordonnées dans $\mathbf{R}^n$ au voisinage de $\overline{z}$ données par le Lemme 5.3 pour ce choix de r et pour $\rho = \rho_p$,

(ii) $\hat{f}_p(y) > \hat{f}_p(\widetilde{y}) - |\widetilde{y} - y|$, pour tout $y, \widetilde{y} \in B(\overline{y}, \delta_y)$, $\delta_y > 0$ (ici $|\cdot|$ est la norme associée au choix de coordonnées).

On pose pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\Lambda_\varepsilon^* = \{(\eta,\zeta) \in T_{\overline{x}}^* X; \zeta_1 > \frac{\varepsilon \rho_p(\overline{z})}{c} |\eta|\}.$$

Lemme 5.4. *Pour tout* $0 < \varepsilon < 1$ *on a les estimations:*

(i) $\dot{N}_{\overline{x}}^*(\hat{\varphi}_p) \subset \Lambda_\varepsilon^*$,

(i) $\dot{N}_{\overline{x}}^*(\widetilde{\varphi}_p) \subset \Lambda_\varepsilon^*$,

où $\dot{N}^*(\cdot) := N^*(\cdot) \setminus T_X^* X$.

preuve. On prouve l'estimation (i), la preuve de (ii) étant pareille.

Pour tout $0 < \varepsilon < 1$ il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que pour toute couple $\widetilde{x} = (\widetilde{y}, \widetilde{z})$, $x = (y,z)$ satisfaisant:

$$\begin{cases} g_p(\widetilde{z}) < c\hat{f}_p(\widetilde{y}), \\ z, \widetilde{z} \in B(\overline{z}, \delta_\varepsilon), \\ y, \widetilde{y} \in B(\overline{y}, \delta_\varepsilon), \\ \widetilde{z}_1 - z_1 > \delta_\varepsilon^{-1} |\widetilde{z}' - z'| + c(\varepsilon \rho_p(\overline{z}))^{-1} |\widetilde{y} - y|, \end{cases}$$

on ait:

$$\begin{aligned} g_p(z) &< g_p(\widetilde{z}) - \varepsilon \rho_p(\overline{z})(\widetilde{z}_1 - z_1) \\ &< c\hat{f}_p(\widetilde{y}) - \varepsilon \rho_p(\overline{z})(\widetilde{z}_1 - z_1) \\ &= c\hat{f}_p(\widetilde{y}) - c|\widetilde{y} - y| + c|\widetilde{y} - y| - \varepsilon \rho_p(\overline{z})(\widetilde{z}_1 - z_1) \\ &< c\hat{f}_p(y). \end{aligned}$$

Soit

$$\Lambda_{\varepsilon,\delta} = \{(\mathrm{y},\mathrm{z}) \in T_{\overline{x}} X; \mathrm{z}_1 > \frac{1}{\delta} |\mathrm{z}'| + \frac{c}{\varepsilon \rho_p(\overline{z})} |\mathrm{y}|\}.$$

Les calculs précédents montrent que $N_{\overline{x}}(\{(y,z) \in X; g_p(z) < c\hat{f}_p(y)\}) = N_{\overline{x}}(\hat{\varphi}_p)^a \supset \Lambda_{\varepsilon,\delta_\varepsilon}^a$. Pour tout $0 < \varepsilon < \overline{\varepsilon} < 1$ on a alors:

$$\begin{aligned} \dot{N}_{\overline{x}}^*(\hat{\varphi}_p) &\subset \Lambda_{\overline{\varepsilon},\delta_{\overline{\varepsilon}}}^* \\ &\subset \{(\eta,\zeta) \in T_{\overline{x}}^* X; \zeta_1 > \delta_\varepsilon |\zeta'| + \frac{\varepsilon \rho_p(\overline{z})}{c} |\eta|\} \\ &\subset \Lambda_\varepsilon^*. \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

fin de la preuve du Théorème 5.1. L'ensemble Λ^*_ε est convexe. On a alors, grâce au Lemme 5.4, $\dot{N}^*_{\overline{x}}(\varphi_p) = \dot{N}^*_{\overline{x}}(\inf\{\hat{\varphi}_p, \widetilde{\varphi}_p\}) \subset \dot{N}^*_{\overline{x}}(\hat{\varphi}_p) + \dot{N}^*_{\overline{x}}(\widetilde{\varphi}_p) \subset \Lambda^*_\varepsilon + \Lambda^*_\varepsilon \subset \Lambda^*_\varepsilon$.

En particulier $\dot{N}^*_{\overline{x}}(\varphi_p) \neq T^*_{\overline{x}}X$.

Il reste donc à montrer que

$$\dot{N}^*_{\overline{x}}(\varphi_p) \cap (\pi_X^{-1}(\overline{x}) \cap SS(F_h)) \subset \{0\}. \tag{5.7}$$

Si $\overline{x} \in U_h$ on a $F_h = 0$ au voisinage de $\overline{x}$.

Si $\overline{x} \in \mathrm{Int}(X \setminus U_h)$ on a $F_h \cong F$ au voisinage de $\overline{x}$. Les coordonnées (y, z) étant normales, on voit que pour $c\rho(\overline{z})/\rho_p(\overline{z}) < \varepsilon < 1$, $\Lambda^*_\varepsilon \subset V \cap \pi_X^{-1}(\overline{x})$. L'estimation (5.7) découle alors de $\dot{N}^*_{\overline{x}}(\varphi_p) \subset \Lambda^*_\varepsilon \subset \pi_X^{-1}(\overline{x}) \cap V$, $SS(F) \cap V = \emptyset$.

Si $\overline{x} \in \partial U_h$ on a $\dot{N}^*_{\overline{x}}(X \setminus U_h) \subset \Lambda^*_\varepsilon$ et donc, d'après le Corollaire 5.4.9 de [K-S 2], $F_h = 0$ au voisinage de $\overline{x}$. C.Q.F.D.

6. Problème de Cauchy holomorphe. Soit Y une variété analytique complexe, connexe, paracompacte et non compacte. On pose $X = Y \times \mathbf{C}^m$, $Y_0 = Y \times \{0\}$. On note $\mathcal{O}_X$ et $\mathcal{D}_X$ les faisceaux des fonctions holomorphes et des opérateurs différentiels sur X, respectivement. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module cohérent pour qui Y_0 soit non caractéristique. Le théorème de Cauchy-Kowalevski se traduit, d'après Kashiwara [K], par l'isomorphisme:

$$R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)|_{Y_0} \xrightarrow{\sim} R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{Y_0}}(\mathcal{M}_{Y_0}, \mathcal{O}_{Y_0}), \tag{6.1}$$

où $\mathcal{M}_{Y_0}$ note le système induit sur Y_0.

On pose:

$$F = R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X), \tag{6.2}$$

le complexe des germes de solutions holomorphes de $\mathcal{M}$. On montre dans [K-S 1, 2] que le micro-support de F coïncide avec la variété caractéristique du système $\mathcal{M}$. Grâce à (6.1), l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy pour $\mathcal{M}$ à données holomorphes sur un ouvert U contenant Y_0, s'écrit sous la forme:

$$R\Gamma(U; F) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(Y_0; F).$$

Les théorèmes 4.1 et 5.1 peuvent s'appliquer donc au problème de Cauchy holomorphe.

En particulier, soit $X = Y \times \mathbf{C}$ et $P \in \mathcal{D}_X$ un opérateur différentiel holomorphe d'ordre m tel que l'hyperplan $Y \times \{0\}$ soit non caractéristique.

On considère le problème de Cauchy:

$$\begin{cases} Pu = v, \\ \gamma(u) = (w), \end{cases} \tag{6.3}$$

où v et $(w) = (w_1, \ldots, w_m)$ sont des fonctions holomorphes dans X et Y_0 respectivement, et $\gamma(u)$ désigne les m premières traces de u sur Y_0.

Appliquant le Théorème 4.1 avec $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X P$ et F comme dans (6.2), on obtient un système fondamental de voisinages ouverts U de Y_0 dans X tel que le problème (6.3) soit bien posé dans U tout entier. On retrouve ainsi un résultat de [B-S, §2].

Si en plus on suppose que $Y \times \{z\}$ soient non caractéristiques pour P pour tout $z \in \mathbf{C}$, on obtient en appliquant le Théorème 5.1 que le problème (6.3) est bien posé dans les ouverts $U_{g,f}$ donnés par (5.1), (5.2).

C'est un résultat moins précis que celui de [H-L-T]. Ces auteurs utilisent en fait pleinement la géométrie de la variété caractéristique de l'opérateur différentiel P.

References

[B-S] J.-M. Bony, P. Schapira, *Existence et prolongement des solutions holomorphes des équations aux dérivées partielles*, Inventiones Math. **17** (1972), 95–105.

[H-L-T] T. Hamada, J. Leray, A. Takeuchi, *Prolongement analytique de la solution du problème de Cauchy linéaire*, J. Math. Pures et Appl. **64** (1985), 257–319.

[K] M. Kashiwara, *Algebraic study of systems of partial differential equations*, Thèse (en japonais), Tokyo (1971).

[K-S 1] M. Kashiwara, P. Schapira, *Microlocal study of sheaves*, Astérisque **128** (1985).

[K-S 2] M. Kashiwara, P. Schapira, *Sheaves on manifolds*, Grundlehren der Math. Wiss., Springer-Verlag **292** (1990).

Dept. de Mathématiques, Université Paris-Nord, F-93430 Villetaneuse, France;

Dip. di Matematica, Università di Padova, via Belzoni 7, I-35131 Padova, Italy