Quantification de Leray de la dualité projective

Andrea D'Agnolo Pierre Schapira

Résumé

Soit $\mathbb{P}$ l'espace projectif complexe de dimension n, $\mathbb{P}^*$ son dual, $\mathbb{A} \subset \mathbb{P} \times \mathbb{P}^*$ la variété d'incidence, f et g les projections de $\mathbb{A}$ sur $\mathbb{P}$ et $\mathbb{P}^*$. Notons $\mathcal{D}_{\mathbb{P}}(k)$ le faisceau des opérateurs différentiels sur $\mathbb{P}$ tordu par le fibré en droites $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(k)$ $(k \in \mathbb{Z})$ et posons $k^* = -n - 1 - k$. Le noyau de Leray [5] permet, pour $-n - 1 < k < 0$, de construire un isomorphisme $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^*}$-linéaire

$$\mathcal{D}_{\mathbb{P}^*}(-k^*) \xrightarrow{\sim} \underline{g}_! \underline{f}^{-1} \mathcal{D}_{\mathbb{P}}(-k) \tag{0.1}$$

d'où un isomorphisme $Rg_! f^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(k) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^*}(k^*)[-n+1]$. Par des formules d'ajonction classiques, on retrouve en particulier l'isomorphisme de Martineau. L'isomorphisme (0.1) est déduit d'un théorème plus général sur les transformations de contact globalement définies en dehors de la section nulle.

Abstract

Leray's quantization of projective duality. Let $\mathbb{P}$ be the n-dimensional complex projective space, $\mathbb{P}^*$ its dual, $\mathbb{A} \subset \mathbb{P} \times \mathbb{P}^*$ the incidence manifold, f and g the projections from $\mathbb{A}$ to $\mathbb{P}$ and $\mathbb{P}^*$. Let $\mathcal{D}_{\mathbb{P}}(k)$ denote the sheaf of differential operators on $\mathbb{P}$ twisted by the line bundle $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(k)$ $(k \in \mathbb{Z})$, and set $k^* = -n - 1 - k$. The Leray's kernel of [5] allows us, for $-n - 1 < k < 0$, to construct a $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^*}$-linear isomorphism

$$\mathcal{D}_{\mathbb{P}^*}(-k^*) \xrightarrow{\sim} \underline{g}_! \underline{f}^{-1} \mathcal{D}_{\mathbb{P}}(-k), \tag{0.2}$$

hence an isomorphism $Rg_! f^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(k) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^*}(k^*)[-n+1]$. Using classical adjunction formulas, we recover in particular Martineau's isomorphism. Isomorphism (0.2) is deduced from a general theorem on contact transformations globally defined outside of the zero-section.

Appeared in: C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **319** (1994), no. 6, 595–598.

1 Transformations de contact

Nous suivrons les notations de [2] et de [4]. Dans cette note, toutes les variétés et tous les morphismes de variétés sont analytiques complexes. Si X est une variété, on désigne par $\pi : T^*X \longrightarrow X$ son fibré cotangent, par $T^*_X X$ la section nulle, et on pose $\dot{T}^*X = T^*X \setminus T^*_X X$. On note $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(X)$ la catégorie dérivée de la catégorie des complexes bornés de faisceaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur une variété X, et f^{-1}, $f^!$, Rf_*, $Rf_!$, $\otimes$ et $R\mathcal{H}om(\cdot,\cdot)$ les "six opérations" usuelles de théorie des faisceaux. Sur une variété X, on note $\mathcal{O}_X$ le faisceau des fonctions holomorphes, Ω_X le faisceau des formes de degré maximum, et $\mathcal{D}_X$ le faisceau des opérateurs différentiels d'ordre fini. On note $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_X)$ la catégorie dérivée de la catégorie des complexes bornés de $\mathcal{D}_X$-modules à gauche, $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{good}}(\mathcal{D}_X)$ la sous-catégorie triangulée pleine engendrée par les objets admettant une bonne filtration sur tout compact de X (cf [8] pour une définition précise), et $\underline{f}^{-1}$, $\underline{f}_!$ les opérations d'image inverse et image directe propre des $\mathcal{D}$-modules. Si $\mathcal{F}$ est un fibré holomorphe sur X, on pose $\mathcal{F}^* = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{O}_X)$, $\mathcal{D}\mathcal{F} = \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$.

Soit

$$X \underset{f}{\longleftarrow} S \underset{g}{\longrightarrow} Y \tag{1.1}$$

une correspondance de variétés analytiques complexes, pour laquelle on fait les hypothèses :

$$\begin{cases} f \text{ et } g \text{ sont lisses et propres,} \\ (f,g) : S \longrightarrow X \times Y \text{ est une immersion fermée.} \end{cases} \tag{1.2}$$

Soient $X \underset{q_1}{\longleftarrow} X \times Y \underset{q_2}{\longrightarrow} Y$ et $T^*X \underset{p_1}{\longleftarrow} T^*(X \times Y) \underset{p_2}{\longrightarrow} T^*Y$ les projections naturelles, posons $p_2^a = a \circ p_2$, où a est l'application antipodale de T^*Y, et considérons la correspondance microlocale associée à (1.1) :

$$T^*X \longleftarrow T^*_S(X \times Y) \longrightarrow T^*Y.$$

On supposera :

$$\begin{cases} p_1|_{\dot{T}^*_S(X\times Y)} \text{ et } p_2^a|_{\dot{T}^*_S(X\times Y)} \text{ sont des isomorphismes} \\ \text{sur } \dot{T}^*X \text{ et } \dot{T}^*Y \text{ respectivement.} \end{cases} \tag{1.3}$$

En d'autres termes, $\dot{T}^*_S(X \times Y)$ est la variété Lagrangienne associée au graphe d'une transformation de contact globalement définie hors de la section-nulle. On pose $n = \dim^{\mathbb{C}} X = \dim^{\mathbb{C}} Y$, $d = \mathrm{codim}^{\mathbb{C}}_{X\times Y} S$.

Définition 1.1. *Soient $A \subset X$, $F \in \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(X)$, $\mathcal{M} \in \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_X)$. Nous posons :*

$$\widehat{A} = g(f^{-1}(A)), \quad \Phi_S F = Rg_! f^{-1} F[n-d], \quad \underline{\Phi}_S \mathcal{M} = \underline{g}_! \underline{f}^{-1} \mathcal{M}.$$

Soit $\widetilde{S} = r(S)$, où $r : X \times Y \longrightarrow Y \times X$ est l'application $r(x, y) = (y, x)$. Nous définissons de même $\widehat{B}$, $\Phi_{\widetilde{S}} G$, $\underline{\Phi}_{\widetilde{S}} \mathcal{N}$, pour $B \subset Y$, $G \in \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(Y)$, $\mathcal{N} \in \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_Y)$.

Rappelons (cf. [2]) que les hypothèses (1.2) et (1.3) entraînent que si $\mathcal{F}$ est un fibré holomorphe, alors le complexe $\underline{\Phi}_S \mathcal{D}\mathcal{F}$ est concentré en degré zéro si et seulement si (supposant Y connexe) il existe $y \in Y$ tel que $H^j(\widehat{y}; \mathcal{F}^*) = 0$ pour tout $j \neq n - d$.

Pour $F \in \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(X)$, $\mathcal{M} \in \mathbf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{good}}(\mathcal{D}_X)$, $G \in \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(Y)$, $\mathcal{N} \in \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_Y)$, on prouve (cf. [2]) que :

$$\begin{aligned}
\mathrm{RHom}(\Phi_S F, G) &\simeq \mathrm{RHom}(F, \Phi_{\widetilde{S}} G), && (1.4)\\
\mathrm{RHom}(\underline{\Phi}_S \mathcal{M}, \mathcal{N}) &\simeq \mathrm{RHom}(\mathcal{M}, \underline{\Phi}_{\widetilde{S}} \mathcal{N}), && (1.5)\\
\Phi_S R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) &\simeq R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\underline{\Phi}_S \mathcal{M}, \mathcal{O}_Y), && (1.6)\\
\mathrm{RHom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M} \otimes \Phi_{\widetilde{S}} G, \mathcal{O}_X) &\simeq \mathrm{RHom}_{\mathcal{D}_Y}(\underline{\Phi}_S \mathcal{M} \otimes G, \mathcal{O}_Y). && (1.7)
\end{aligned}$$

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux fibrés en droites sur X et Y respectivement. On posera :

$$\mathcal{B}^{(n,0)}_{S|X\times Y}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = ((\Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}) \boxtimes \mathcal{G}) \otimes_{\mathcal{O}_X \boxtimes \mathcal{O}_Y} \mathcal{B}_{S|X\times Y},$$

où $\mathcal{B}_{S|X\times Y}$ désigne le module holonôme associé à $S \subset X \times Y$. On montre facilement (cf. [2]) que pour $\mathcal{M} \in \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_X)$:

$$\underline{\Phi}_S \mathcal{M} \simeq Rq_{2!}(\mathcal{B}^{(n,0)}_{S|X\times Y} \otimes^L_{q_1^{-1}\mathcal{D}_X} q_1^{-1}\mathcal{M}), \tag{1.8}$$

et $\mathcal{D}\mathcal{G}$ étant $\mathcal{D}_Y$-cohérent, on en déduit l'isomorphisme :

$$\Gamma(X \times Y; \mathcal{B}^{(n,0)}_{S|X\times Y}(\mathcal{F}, \mathcal{G}^*)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_Y)}(\mathcal{D}\mathcal{G}, \underline{\Phi}_S \mathcal{D}\mathcal{F}). \tag{1.9}$$

Définition 1.2. *Soit $s \in \Gamma(X \times Y; \mathcal{B}^{(n,0)}_{S|X\times Y}(\mathcal{F}, \mathcal{G}^*))$. On note :*

$$\alpha(s) : \mathcal{D}\mathcal{G} \longrightarrow \underline{\Phi}_S \mathcal{D}\mathcal{F}$$

le morphisme $\mathcal{D}_Y$-linéaire associé à s par (1.9).

Nous disons qu'une section de $\mathcal{B}_{S|X\times Y}$ est non dégénérée au voisinage de $p \in \dot{T}^*_S(X \times Y)$ si la section du faisceau des microfonctions $\mathcal{C}_{S|X\times Y}$ qu'elle définit est non dégénérée au sens de [7]. Cette définition s'étend immédiatement à $\mathcal{B}^{(n,0)}_{S|X\times Y}(\mathcal{F}, \mathcal{G}^*)$ puisque ce faisceau est localement isomorphe à $\mathcal{B}_{S|X\times Y}$.

Théorème 1.3. *Supposons (1.2), (1.3), et Y connexe. Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux fibrés en droites sur X et Y respectivement, et soit $s \in \Gamma(X \times Y; \mathcal{B}^{(n,0)}_{S|X\times Y}(\mathcal{F}, \mathcal{G}^*))$ une section non dégénérée sur $\dot{T}^*_S(X \times Y)$. Supposons qu'il existe $y \in Y$ tel que $H^0(\widehat{y}; \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X) = 0$, et $H^j(\widehat{y}; \mathcal{F}^*) = 0$ pour tout $j \neq n - d$. Alors le complexe $\underline{\Phi}_S \mathcal{D}\mathcal{F}$ est en degré zéro, et :*

(i) le morphisme $\alpha(s) : \mathcal{D}\mathcal{G} \longrightarrow \underline{\Phi}_S \mathcal{D}\mathcal{F}$ est un isomorphisme $\mathcal{D}_Y$-linéaire,

(ii) cet isomorphisme induit un isomorphisme $\Phi_S \mathcal{F}^* \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}^*$ dans $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(Y)$.

L'assertion (ii) se déduit de (i) et de l'isomorphisme (1.6) appliqué à $\mathcal{M} = \mathcal{D}\mathcal{F}$. Pour démontrer (i) on utilise [7] qui assure que $\alpha(s)$ est un isomorphisme "hors de la section-nulle". Les hypothèses d'annulation de cohomologie permettent d'étendre cet isomorphisme à l'espace tout entier.

2 Dualité projective

Soit $\mathbb{P}$ l'espace projectif complexe de dimension n, $\mathbb{P}^*$ son dual, $\mathbb{A} \subset \mathbb{P} \times \mathbb{P}^*$ la variété d'incidence, et considérons les projections :

$$\mathbb{P} \longleftarrow \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{P}^*. \tag{2.1}$$

Les hypothèses (1.2), (1.3) sont satisfaites pour la correspondance (2.1).

Pour $k \in \mathbb{Z}$, notons par $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(k)$ la $-k$-ième puissance tensorielle du fibré tautologique, et posons $\mathcal{D}_{\mathbb{P}}(k) = \mathcal{D}_{\mathbb{P}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(k)$.

Soient $[\xi] = [\xi_0, \ldots, \xi_n]$, $[\eta] = [\eta_0, \ldots, \eta_n]$ deux systèmes de coordonnées homogènes duales dans $\mathbb{P}$ et $\mathbb{P}^*$ respectivement. Suivant Leray [5], on pose :

$$\omega^*(\xi) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \xi_i \, d\xi_0 \wedge \cdots \wedge \widehat{d\xi_i} \wedge \cdots \wedge d\xi_n,$$

et on remarque que :

$$s_k(\xi, \eta) = \frac{\omega^*(\xi)}{\langle \xi, \eta \rangle^{n+1+k}} \tag{2.2}$$

est une section bien définie de $\mathcal{O}^{(n,0)}_{\mathbb{P}\times\mathbb{P}^*} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^*}} (\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-k) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^*}(k^*))$ sur $\mathbb{P} \times \mathbb{P}^* \setminus \mathbb{A}$, où on a posé :

$$k^* = -n - 1 - k.$$

Si $n + 1 + k > 0$, s_k définit une section non dégénérée sur $\mathbb{P} \times \mathbb{P}^*$ du faisceau $\mathcal{B}^{(n,0)}_{S|X\times Y}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-k^*), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^*}(-k))$. De plus, pour $y \in \mathbb{P}^*$ l'ensemble $\widehat{y}$ est un hyperplan de $\mathbb{P}$, et on vérifie que les hypothèses d'annulation de cohomologie du Théorème 1.3 sont satisfaites si et seulement si $k, k^* < 0$. On obtient donc :

Théorème 2.1. *Supposons $-n-1 < k < 0$. Alors :*

(i) le morphisme $\alpha(s_k) : \mathcal{D}_{\mathbb{P}^*}(-k^*) \longrightarrow \underline{\Phi}_{\mathbb{A}}(\mathcal{D}_{\mathbb{P}}(-k))$ est un isomorphisme $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^*}$-linéaire,

(ii) cet isomorphisme induit un isomorphisme $\Phi_{\mathbb{A}}\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(k) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^*}(k^*)$ dans $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{P}^*)$.

Utilisant la formule (1.7) on obtient :

Corollaire 2.2. *Soit $-n-1 < k < 0$, et soit $F \in \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(Y)$. Alors, $\alpha(s_k)$ définit un isomorphisme :*

$$\mathrm{RHom}(F, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(k)) \simeq \mathrm{RHom}(\Phi_{\mathbb{A}}F, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^*}(k^*)). \tag{2.3}$$

Remarque 2.3. *On pourrait donner une démonstration directe du Théorème 2.1, ne faisant pas appel à [7], en montrant que la composée $s_k(\xi,\eta)\circ s_{k^*}(\eta,\xi)$ est à une constante près le noyau de la formule intégrale de Cauchy-Fantappiè.*

Soient $E \subset \mathbb{P}$ et $E^* \subset \mathbb{P}^*$ les cartes affines définies par $\xi_0 \neq 0$ et $\eta_0 \neq 0$ respectivement. Si $K \subset E$ est un sous-ensemble compact convexe contenant l'origine, l'ensemble $K^\# := \mathbb{P}^* \setminus \widehat{K}$ est ouvert et inclus dans E^*. Si on identifie les points de $\mathbb{P}^*$ avec les hyperplans de $\mathbb{P}$, $K^\#$ est l'ensemble des hyperplans de $\mathbb{P}$ qui n'intersectent pas K. On vérifie immédiatement que $\Phi_{\mathbb{A}}\mathbb{C}_K = \mathbb{C}_{\widehat{K}}[n-1]$.

Corollaire 2.4. *(Martineau [6]) Soit K un compact convexe de E contenant l'origine. Alors on a $H^j_K(E;\mathcal{O}_E) = 0$ pour $j \neq n$, et $H^n_K(E;\mathcal{O}_E) \simeq \Gamma(K^\#;\mathcal{O}_{E^*})$.*

Preuve : Appliquant le Corollaire 2.2 avec $F = \mathbb{C}_K$, on obtient l'isomorphisme :

$$\mathrm{R}\Gamma_{\widehat{K}}(\mathbb{P}^*;\mathcal{O}_{\mathbb{P}^*}(k))[1] \simeq \mathrm{R}\Gamma_K(E;\mathcal{O}_E)[n].$$

Le terme de gauche est concentré en degré ≥ 0 et celui de droite en degré ≤ 0. Ils sont donc tous les deux en degré 0. Il suffit alors de prendre $k = -1$, et d'utiliser $H^1(\mathbb{P}^*;\mathcal{O}_{\mathbb{P}^*}(-1)) = 0$. *q.e.d.*

La même technique permettrait de retrouver des résultats de Trépreau [10] et Henkin [3]. D'autre part, $\Phi_{\mathbb{A}}$ transforme faosceaux $\mathbb{C}$-constructibles (ou pervers, cf [1]) en faisceaux du même type. Le Corollaire 2.2 permet alors d'échanger fonctions holomorphes ramifiées sur $\mathbb{P}$ et $\mathbb{P}^*$ (cf [9] pour un résultat de c e type).

Références bibliographiques

[1] J. L. Brylinski. *Transformations canoniques, Dualité projective, Théorie de Lefschetz, Transformations de Fourier et sommes trigonométriques.* Astérisque, 140-141 (1986) p. 3–134.

[2] A. D'Agnolo et P. Schapira. *The Radon-Penrose transform for $\mathcal{D}$-modules.* A paraître; *La transformée de Radon-Penrose des $\mathcal{D}$-modules.* A paraître dans C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math..

[3] G. M. Henkin. *The Abel-Radon transform and several complex variables.* preprint (1993).

[4] M. Kashiwara et P. Schapira. *Sheaves on Manifolds.* Springer-Verlag, Grundlehren der Math. Wiss. 292 (1990).

[5] J. Leray. *Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe.* Bull. Soc. math. France, 87 (1959) p. 81–180.

[6] A. Martineau. *Indicatrice des fonctions analytiques et inversion de la transformation de Fourier-Borel par la transformation de Laplace.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 255 (1962) p. 2888–2890.

[7] M. Sato, T. Kawai, et M. Kashiwara. *Hyperfunctions and pseudo-differential equations.* Dans : Hyperfunctions and Pseudo-Differential Equations, H. Komatsu, editor. Lecture Notes in Mathematics 287 p. 265–529. Springer-Verlag (1973).

[8] P. Schapira et J.-P. Schneiders. *Elliptic pairs I. Relative finiteness and duality.* Preprint 937, Kyoto University (1993). A paraître dans Astérisque (1995).

[9] B. Yu. Sternin et V. E. Shatalov. *Differential equations on complex manifolds.* Kluwer Acad. (1994).

[10] J.-M. Trépreau. *Transformation de Legendre et pseudoconvexité avec décalage.* Preprint (1993).

A. D'Agnolo, P. Schapira; Institut de Mathématiques U.M.R. 9994 CNRS; Université Paris VI; Tour 46-0, 5ème étage, Boîte 172; 4, place Jussieu; 75252 Paris Cedex 05