HYPOELLIPTICITE AU BORD POUR LES SYSTEMES A CARACTERISTIQUES SIMPLES

Andrea D'Agnolo   Giuseppe Zampieri

Abstract. Let M be a real C^2 submanifold of a complex analytic manifold X, and let $\mathcal{M}$ be a system of partial differential equations with complex simple characteristics on X. Let $\Omega \subset M$ be an open subset with C^2 boundary $S = \partial\Omega$.

Here, we prove a theorem of microlocal hypoellipticity at the boundary for the solutions of the system $\mathcal{M}$. More precisely, we give a criterion for the vanishing of the cohomology of the complex $\mathrm{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{\Omega/X})$ of microfunction at the boundary solutions of the system. This work extends to the case of boundary value problems previous results of [S-K-K], [K-S 2], [D'A-Z 2].

Résumé. Soit M une sous-variété réelle de classe C^2 d'une variété complexe analytique X, et soit $\mathcal{M}$ un système d'équations différentielles à caractéristiques complexes simples dans X. Soit $\Omega \subset M$ un ouvert à bord C^2 $S = \partial\Omega$.

On prouve ici un théorème d'hypoellipticité microlocale au bord pour les solutions du système $\mathcal{M}$. Plus precisémment, on donne un critère d'annulation de la cohomologie pour le complexe $\mathrm{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{\Omega/X})$ des microfonctions au bord solutions du système. Ce travail étend au cas des problèmes aux limites résultats précédents de [S-K-K], [K-S 2], [D'A-Z 2].

Résumé des resultats classiques

Soit $\mathcal{M}$ un système d'équations aux dérivées partielles linéaires analytiques à caractéristiques complexes simples sur une variété analytique réelle M de complexifié X. Dans l'oeuvre classique [S-K-K], Sato, Kawaï et Kashiwara démontrent qu'au voisinage d'un point réel $p \in \operatorname{char} \mathcal{M} \cap T^*_M X$ de la variété caractéristique du système, $\mathcal{M}$ se réduit par une transformation de contact quantifiée (préservant le fibré conormal $T^*_M X$) aux modèles suivants: Cauchy-Riemann, de Rham, Lewy-Mizohata. En outre, ils montrent qu'il y a un lien entre l'annulation de cohomologie du complexe des solutions microfonctions de $\mathcal{M}$ et les nombres de valeurs propres positives et négative de la forme de Levi généralisée du système. Par exemple, l'opérateur de Lewy-Mizohata $P = D_1 + ix_1 D_2$ est hypoelliptique (i.e. injectif en tant que endomorphisme de l'espace des microfonctions) au voisinage du point microlocale $p = (0; idx_2)$, tandis qu'il est résoluble (i.e. surjectif) au point $p = (0; -idx_2)$.

En utilisant la méthode de [K-S 2], nous montrerons comment étendre ces résultats d'annulation de cohomologie aux solutions microfonctions au bord.

§ 1 Formes de Levi généralisées

Soit X une variété analytique complexe, $\pi : T^*X \to X$ son fibré cotangent, $\alpha_X = \alpha_X^{\mathbf{R}} + i\alpha_X^{\mathbf{R}}$ (resp. $\sigma_X = \sigma_X^{\mathbf{R}} + i\sigma_X^{\mathbf{R}}$) la 1-forme (resp. 2-forme) sur T^*X. Notons

Appeared in: Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino **51** (1993), no. 4, 413–421 (1994), Partial differential equations, I (Turin, 1993).

par $X^{\mathbf{R}}$ la variété analytique réelle sous-jacente à X, et considérons l'identification $T^*(X^{\mathbf{R}}) \simeq (T^*X)^{\mathbf{R}}$ obtenue en munisant $T^*(X^{\mathbf{R}})$ de la 1-forme $\alpha_X^{\mathbf{R}}$. Soit M une sous-variété C^2 de $X^{\mathbf{R}}$, $p \in \dot{T}_M^*X$ un point du fibré conormal à M privé de la section nulle. Si $\phi = 0$ est une équation de M au voisinage de $x = \pi(p)$, telle que $d\,\phi(x) = p$, on définit la forme de Levi de M en p par

$$L_M(p) = \partial\overline{\partial}\phi|_{T_x^{\mathbf{C}}M}, \tag{1.1}$$

où $T_x^{\mathbf{C}}M = T_xM \cap iT_xM$ note l'espace vectoriel complexe tangent à M.

Soient $\lambda_0 = T_p\pi^{-1}(x)$, $\lambda_M = T_pT_M^*X$, $\mu = \lambda_M \cap i\lambda_M$ (un plan isotrope), et considérons la forme Hermitienne L_{λ_M/λ_0} sur $\lambda_0^{\mu} = (\lambda_0 \cap \mu^{\perp})/\mu$ définie par

$$L_{\lambda_M/\lambda_0}(v, w) = \sigma_X^{\mu}(v, w^c), \tag{1.2}$$

où σ_X^{μ} note la forme symplectique induite par σ_X sur $\mu^{\perp}/\mu$, et w^c note le conjugué de w par rapport à l'identification $\mu^{\perp}/\mu = \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} \lambda_M^{\mu}$. D'après [S], [D'A-Z 1] on a une équivalence

$$L_M(p) \sim L_{\lambda_M/\lambda_0}$$

en rang et signature, ce qui montre entre outre l'indépendance de (1.1) par rapport au choix de l'équation ϕ.

Notons que la définition (1.2) garde un sens quand l'on remplace λ_M par n'importe quelle Lagrangienne λ de $T^*X^{\mathbf{R}}$ et λ_0 par n'importe quel plan isotrope complexe ρ de T^*X. En particulier, si $V \subset \dot{T}^*X$ est une variété involutive régulière au voisinage de p et $\rho = T_pV^{\perp}$, on obtient la forme $L_{\lambda_M/\rho}$ qui s'avère être équivalente à la forme de Levi généralisée $L_{T_M^*X}(V, p)$ de Sato, Kawaï et Kashiwara [S-K-K, Def. 2.3.1] (cf. [K-S 2], [D'A-Z 2]). En effet, soit $f_i = 0$, $i = 1, \ldots, l$ un système d'équations indépendantes pour V et supposons que $\rho \subset \lambda_M + i\lambda_M$. Alors $L_{\lambda_M/\rho}$ est la forme Hermitienne de matrice $\{f_i, f_j^c\}_{i,j}$ dans la base H_{f_i} de ρ, où $\{\cdot,\cdot\}$ note le crochet de Poisson, f_j^c est la seule fonction holomorphe de T^*X telle que $f_j^c|_{T_M^*X} = \overline{f}_j|_{T_M^*X}$, et H_{f_i} note le champ Hamiltonien.

Exemple. Soient $M = \mathbf{R}^n$, $X = \mathbf{C}^n$, et $V \subset T^*X$ l'hypersurface donnée par l'équation $f = 0$. Si $f = f^{\mathbf{R}} + if^{\mathbf{I}}$ avec $f^{\mathbf{R}}|_{T_M^*X} = \operatorname{Re} f|_{T_M^*X}$, et $f^{\mathbf{I}}|_{T_M^*X} = \operatorname{Im} f|_{T_M^*X}$, alors

$$L_{T_{\mathbf{R}^n}^*\mathbf{C}^n}(V, p) = \{f, f^c\}(p) = -2i\{f^{\mathbf{R}}, f^{\mathbf{I}}\}.$$

En particulier, si V est la variété caractéristique de l'opérateur de Lewy-Mizohata $P = D_1 + ix_1D_2$ et $f = \sigma(P) = (-i\zeta_1) + iz_1(-i\zeta_2)$, alors

$$\{f, f^c\}(\pm i d\,x_2) = -2i\{-i\zeta_1, z_1(-i\zeta_2)\}(\pm i d\,x_2) = 2i\zeta_2(\pm i d\,x_2) = \mp 2.$$

Notations. On note par $s_M^{\pm}(p)$ (resp. $s_{M,V}^{\pm}(p)$) le nombre de valeurs propres positives et négative de $L_M(p)$ (resp. $L_{T_M^*X}(V, p)$), et par $\delta_{M,V}(p)$ la codimension de $\rho \cap (\lambda_M \cap i\lambda_M)$ dans $\rho = (T_pV)^{\perp}$.

Soient $S \subset M$ deux sous-variétés C^2 de $X^{\mathbf{R}}$. D'après [D'A-Z 1], [D'A-Z 2], pour $p \in S \times_M \dot{T}_M^*X$ on a les estimations:

$$s_S^{\pm}(p) \leq s_M^{\pm}(p) \leq s_S^{\pm}(p) + \operatorname{cod}_{T_p^{\mathbf{C}}M} T_p^{\mathbf{C}}S, \tag{1.3}$$

$$s_{M,V}^{\pm}(p) + \delta_{M,V}(p) \leq s_{S,V}^{\pm}(p) + \delta_{S,V}(p). \tag{1.4}$$

§ 2. Enoncé du résultat principal

Soient X une variété analytique complexe, $S \subset M$ deux sous-variétés C^2 de $X^{\mathbf{R}}$, et $p \in S \times_M \dot{T}^*_M X$ un point tel que $ip \notin T^*_S X$. On note par

$$\gamma_M(x) = \dim^{\mathbf{C}}(T^*_M X_x \cap iT^*_M X_x) \ (= \dim^{\mathbf{C}}(\lambda_M \cap i\lambda_M \cap \lambda_0))$$

le "défaut de généricité" de M en $x = \pi(p)$. Soit Ω une composante connexe de $M \setminus S$ au voisinage de x. Suivant [K-S 1] et [S 2], on définit les complexes

$$\mathcal{B}_{\Omega/X} = \mathrm{R}\Gamma_\Omega(\mathcal{O}_X) \otimes or_{M/X}[\mathrm{cod}^{\mathbf{R}}_X M - \gamma_M(x)],$$
$$\mathcal{C}_{\Omega/X} = \mu_\Omega(\mathcal{O}_X) \otimes or_{M/X}[\mathrm{cod}^{\mathbf{R}}_X M - \gamma_M(x)],$$

des hyperfonctions (resp. microfonctions) le long de Ω au voisinage de x et p respectivement. Moyennant le morphisme spectral

$$\pi^{-1}H^0(\mathcal{B}_{\Omega/X}) \xrightarrow{j} H^0\mathcal{C}_{\Omega/X},$$

on définit d'après [S 2] le micro-support au bord de $u \in H^0(\mathcal{B}_{\Omega/X})$ par

$$\mathrm{SS}_\Omega(u) = \mathrm{supp}\, j(u).$$

Exemple. Si M est une variété analytique réelle de complexifié X, cette définition coïncide sur Ω avec celle usuelle de micro-support SS(u) de Sato: $\mathrm{SS}_\Omega(u)|_{\pi^{-1}\Omega} = \mathrm{SS}(u)|_{\pi^{-1}\Omega}$. On démontre aussi que $p \notin \mathrm{SS}_\Omega(u)$ si et seulement si u est somme de valeurs au bord sur M de fonctions holomorphes F_i définies dans des "wedges" avec propriété de cône au bord $\partial\Omega$, dont le "profile" $\Gamma_i \subset T_M X$ vérifie $p \notin -\Gamma_i^\circ$, l'antipodale du polaire de Γ_i.

Soit $\mathcal{M}$ un système différentiel à caractéristiques simples le long de $V = \mathrm{char}(\mathcal{M})$ au voisinage de $p \in S \times_M \dot{T}^*_M X$. On fera toujours l'hypothèse que

$$V \cap T^*_M X \text{ et } V \cap T^*_S X \text{ sont "clean".} \tag{2.1}$$

On note par $\mathcal{C}^{\mathcal{M}}_{\Omega/X} = \mathrm{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{\Omega/X})$ le complexe des solutions $\mathcal{C}_{\Omega/X}$ de $\mathcal{M}$, et par $\mathcal{B}^{\mathcal{M}}_{\Omega/X} = \mathrm{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{\Omega/X})$ celui des solutions $\mathcal{B}_{\Omega/X}$.

Théorème 2.1. *On a*

$$H^j(\mathcal{C}^{\mathcal{M}}_{\Omega/X})_p \quad \textit{pour tout } j < s^-_M + (s^-_{M,V} + \delta_{M,V}).$$

Remarque.

(a) Si M est générique (i.e. $\gamma_M = 0$) et $u = b_M(F)$ est la valeur au bord sur M d'une fonction holomorphe F définie dans un "wedge" conique en $\partial\Omega$ à profile Γ, solution d'un système $\mathcal{M}$ tel que

$$\begin{cases} \text{ou bien } s^-_M(p) \geq 1 \quad \forall p \in -\Gamma^\circ, \\ \text{ou bien } s^-_{M,V}(p) + \delta_{M,V}(p) \geq 1 \quad \forall p \in -\Gamma^\circ, \end{cases}$$

alors F s'étend à un domaine W dont le cône de Whitney est un voisinage de Ω (e.g. si $\Omega = \{x_1 > 0,\ x_2 = 0\}$, alors $W \supset \{|x_2| < \epsilon x_1\}$ pour quelque $\epsilon << 1$).

(b) Si M est une variété analytique générique de complexifié $M^{\mathbf{C}}$, alors $\mathcal{B}_{\Omega/X}$ s'identifie au complexe $\mathrm{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{M^{\mathbf{C}}}}(\overline{\partial}^b, \Gamma_\Omega \mathcal{B}_{M/M^{\mathbf{C}}})$ des hyperfonctions CR sur Ω, c'est à dire aux solutions hyperfonctions du système $\overline{\partial}$ tangentiel. En particulier

$$\mathcal{B}_{\Omega/X}^{\mathcal{M}} = \mathcal{B}_{\Omega/M^{\mathbf{C}}}^{\underline{j}^{-1}\mathcal{M}}$$

où $j : M^{\mathbf{C}} \to X$ est l'application lisse induite par l'immersion $M \hookrightarrow X$, et $\underline{j}^{-1}\mathcal{M}$ note le système induit sur $M^{\mathbf{C}}$. Nous avons cependant préféré l'énoncé du Théorème 2.1 qui mieux clarifie les contributions s_M^- et $s_{M,V}^- + \delta_{M,V}$ de la variété M et du système $\mathcal{M}$ respectivement.

Idée de la preuve du Théorème 2.1. Pour $\Omega = M \setminus S$, on a un triangle distingué

$$\mu_S(\mathcal{O}_X)^{\mathcal{M}} \to \mu_M(\mathcal{O}_X)^{\mathcal{M}} \to \mu_\Omega(\mathcal{O}_X)^{\mathcal{M}} \overset{+1}{\to} . \tag{2.2}$$

D'après [K-S 2], dans la version généralisée de [D'A-Z 2], on peut montrer que

$$\begin{aligned} H^j\mu_M(\mathcal{O}_X)_p^{\mathcal{M}} &\quad \text{pour tout } j < c_{1M} + c_{2M}, \\ H^j\mu_S(\mathcal{O}_X)_p^{\mathcal{M}} &\quad \text{pour tout } j < c_{1S} + c_{2S}, \end{aligned}$$

où on pose

$$c_{1M} = \mathrm{cod}_X M + s_M^- - \gamma_M(x), \quad c_{2M} = s_{M,V}^- + \delta_{M,V},$$

et de même pour c_{1S}, c_{2S}.

Par les estimations (1.3), (1.4) on a $c_{1S} + c_{2S} \geq c_{1M} + c_{2M}$, et donc $H^j(\mathcal{C}_{\Omega/X}^{\mathcal{M}})_p = 0$ pour tout $j < c_{1M} + c_{2M} - 1$. Il nous reste à prouver l'annulation en degré $j = c_{1M} + c_{2M} - 1$, ce que l'on déduit du théorème suivant. Q.E.D.

Théorème 2.2. *Supposons*

$$\begin{cases} c_{1M} = c_{1S}, \\ c_{2M} = c_{2S}. \end{cases} \tag{2.3}$$

Alors pour $c = c_{1M} + c_{2M} = c_{1S} + c_{2S}$ le morphisme naturel

$$H^c\mu_S(\mathcal{O}_X)_p^{\mathcal{M}} \to H^c\mu_M(\mathcal{O}_X)_p^{\mathcal{M}} \tag{2.4}$$

est injectif.

Dans la même lignée on a aussi

Théorème 2.3. *Supposons (2.3) et aussi*

$$\widetilde{T_M^*X \cap V} = \widetilde{T_S^*X \cap V}, \tag{2.5}$$

où $\widetilde{T_M^*X \cap V}$ note la réunion des feuilles bicaractéristiques de V issues de $T_M^*X \cap V$. Alors

$$\mu_S(\mathcal{O}_X)_p^{\mathcal{M}} \xrightarrow{\sim} \mu_M(\mathcal{O}_X)_p^{\mathcal{M}}.$$

Exemple. Soit M est une variété analytique réelle de complexifié X, $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X P$ pour $P = D_1 + ix_1 D_2$ l'opérateur de Lewy-Mizohata. Soit $p = (0; idx_2)$, et $S = \partial\Omega$ défini par $g = 0$ avec $dg \notin \mathbf{R}dx_2$. Alors $c_{1M} = c_{1S} = n$; puisque en outre $s^-_{M,V} = 1$, il en suit

$$H^0(\mathcal{C}^{\mathcal{M}}_{\Omega/X})_p = 0$$

(cf [T-U] pour le cas $g = x_1$). Donc, au point p l'opérateur de Lewy-Mizohata P est hypoelliptique au bord de Ω. Si en plus on choisit $g = x_1$, alors $V \cap T^*_M X = V \cap T^*_S X$ et $\delta_{S,V} = 1$; donc (2.3), (2.5) sont satisfaites avec $c_{2M} = c_{2S} = 1$, et cela donne

$$(\mathcal{C}^{\mathcal{M}}_{\Omega/X})_p = 0.$$

§3. Idée de la preuve des Théorèmes 2.2 et 2.3.

On choisi une transformation de contact complexe χ telle que

$$\begin{cases} \chi(T^*_M X) = T^*_{\widetilde{M}} X, & \mathrm{cod}^{\mathbf{R}}_X \widetilde{M} = 1, \quad s^-_{\widetilde{M}}(\chi(p)) = 0, \\ \chi(T^*_S X) = T^*_{\widetilde{S}} X, & \mathrm{cod}^{\mathbf{R}}_X \widetilde{S} = 1, \\ \chi(V) = X \times_Y T^*Y, & \text{pour une application lisse} \quad f : X \to Y, \end{cases}$$

D'après [K-S 3, ch. 7], on peut alors quantifier χ avec un noyau K pour obtenir

$$\begin{cases} \phi_K(\mathbf{C}_M) \simeq \mathbf{C}_{\widetilde{M}}[c_{1M} - 1], \\ \phi_K(\mathbf{C}_S) \simeq \mathbf{C}_{\widetilde{S}}[c_{1S} - 1 - s^-_{\widetilde{S}}]. \end{cases}$$

Le foncteur ϕ_K échange le morphisme de restriction $\mathbf{C}_M \to \mathbf{C}_S$ en un morphisme non nul $\mathbf{C}_{\widetilde{M}}[c_{1M} - 1] \to \mathbf{C}_{\widetilde{S}}[c_{1S} - 1 - s^-_{\widetilde{S}}]$. Mais

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^b(X;p)}(\mathbf{C}_{\widetilde{M}}[c_{1M} - 1], \mathbf{C}_{\widetilde{S}}[c_{1S} - 1 - s^-_{\widetilde{S}}]) &\simeq H^0 \mu\mathrm{hom}(\mathbf{C}_{\widetilde{M}}, \mathbf{C}_{\widetilde{S}})_{\chi(p)}[c_{1S} - c_{1M} - s^-_{\widetilde{S}}] \\ &\simeq H^0 \mathrm{R}\Gamma_{\widetilde{S}^+}(\mathbf{C}_{\widetilde{M}^+})_{\pi(\chi(p))}[c_{1S} - c_{1M} - s^-_{\widetilde{S}}], \end{aligned}$$

où $\mathrm{D}^b(X;p)$ note la catégorie "microlocale" des faisceaux définie par [K-S 3], et $\widetilde{S}^+$ et $\widetilde{M}^+$ notent les demi-espaces fermés à bord S et M, et de conormale interne $\chi(p)$. En remarquant que $c_{1S} = c_{1M}$ on déduit

$$\begin{cases} s^-_{\widetilde{S}} = 0, \\ \widetilde{S}^+ \subset \widetilde{M}^+. \end{cases}$$

Soit $f_\pi : \chi(V) \to T^*Y$ la projection le long des feuilles de $\chi(V)$. Moyennant une nouvelle transformation en T^*Y, on peut supposer que

$$\begin{cases} f_\pi {}^t f'^{-1}(T^*_{\widetilde{M}} X) = T^*_N Y, & \mathrm{cod}^{\mathbf{R}}_Y N = 1, \ s^-_N = 0, \\ f_\pi {}^t f'^{-1}(T^*_{\widetilde{S}} X) = T^*_Z Y, & \mathrm{cod}^{\mathbf{R}}_Y Z = 1, \ s^-_Z = 0. \end{cases}$$

Soit $f^{\mu,p}_!$ le foncteur d'image directe microlocale de [K-S 3, Ch. 6]. D'après [K-S 2], [D'A-Z 2], on a

$$\begin{cases} f^{\mu,p}_! \mathbf{C}_{\widetilde{M}^+}[c_{1M} - 1] = \mathbf{C}_{N^+}[c_{1M} + c_{2M} - 1], \\ f^{\mu,p}_! \mathbf{C}_{\widetilde{S}^+}[c_{1S} - 1] = \mathbf{C}_{Z^+}[c_{1S} + c_{2S} - 1], \end{cases}$$

avec $c_{jM} = c_{jM} =: c_j$ $(j = 1, 2)$. On obtient alors par adjonction

$$\begin{aligned}\mu_M(\mathcal{O}_X)_p^{\mathcal{M}} &\cong \mathrm{R}\Gamma_{\widetilde{M}^+}(f^{-1}\mathcal{O}_Y)_{\pi(\chi(p))}[1-(c_1+c_2)] \\ &\cong \mathrm{R}\Gamma_{N^+}(\mathcal{O}_Y)_{\pi(q)}[1-(c_1+c_2)],\end{aligned}$$

pour $q = f_\pi(\chi(p))$. De même pour $\mu_S(\mathcal{O}_X)_p^{\mathcal{M}}$. En outre, le morphisme

$$H^{c_1+c_2}\mu_S(\mathcal{O}_X)_p^{\mathcal{M}} \to H^{c_1+c_2}\mu_M(\mathcal{O}_X)_p^{\mathcal{M}}$$

induit un morphisme

$$\mathcal{H}^1_{Z^+}(\mathcal{O}_Y)_y \to \mathcal{H}^1_{N^+}(\mathcal{O}_Y)_y, \tag{3.1}$$

pour $y = \pi(q)$. Pour prouver (2.4) il s'agit donc de prouver que ce dernier morphisme est injectif. Ce qui est une conséquence de la

Proposition 3.1. *Le morphisme*

$$f_!^{\mu,p}: \ \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^b(X;p)}(\mathbf{C}_{\widetilde{M}^+}, \mathbf{C}_{\widetilde{S}^+}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^b(Y;q)}(\mathbf{C}_{N^+}, \mathbf{C}_{Z^+})$$

est un isomorphisme.

En effet, cette proposition entraîne que $N^+ \subset Z^+$ et que le morphisme (3.1) est induit par cette inclusion.

preuve de la Proposition 3.1. On pose $M_1 = M$, $M_2 = S$. On doit montrer que le morphisme

$$\text{“}\varprojlim_{U\ni x}\text{''}\mathrm{R}f_!\mathbf{C}_{M_1^+\cap U} \longrightarrow \text{“}\varprojlim_{U\ni x}\text{''}\mathrm{R}f_!\mathbf{C}_{M_2^+\cap U}$$

induit par $\mathbf{C}_{M_1^+} \to \mathbf{C}_{M_2^+}$ est non nul. Pour cela il suffit de prouver que le morphisme induit

$$\text{“}\varprojlim_{U\ni x}\text{''}\left(\mathrm{R}f_!\mathbf{C}_{M_1^+\cap U}\right)_y \longrightarrow \text{“}\varprojlim_{U\ni x}\text{''}\left(\mathrm{R}f_!\mathbf{C}_{M_2^+\cap U}\right)_y \tag{3.2}$$

est un isomorphisme.

On choisi un système de coordonnés locales (y, t) sur X et $(y) = (y_1, y')$ sur Y, tel que $p = (0; d\,y_1)$, $f(y, t) = y$, $M_j = \{y_1 = h_j(y', t)\}$ avec $h_j = d\,h_j = 0$ sur M_j au voisinage de x $(j = 1, 2)$. Dès que $(\mathrm{R}f_!\mathbf{C}_{M_2^+\cap U})_y \cong \mathrm{R}\Gamma_c(f^{-1}(y)\cap M_2^+\cap U; \mathbf{C}_{f^{-1}(0)})$, dans ces coordonnés (3.2) se lit

(3.2)'

$$\text{“}\varprojlim_{V\ni 0}\text{''}\mathrm{R}\Gamma_c(\{V\cap\{h_1(0,t)\le 0\}; \mathbf{C}_{\mathbf{R}_t^{2n-2l}}) \xrightarrow{\sim} \text{“}\varprojlim_{V\ni 0}\text{''}\mathrm{R}\Gamma_c(\{V\cap\{h_2(0,t)\le 0\}; \mathbf{C}_{\mathbf{R}_t^{2n-2l}}),$$

où V est un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}_t^{2n-2l}$, $l = \mathrm{cod}_X^{\mathbf{C}}\, V$. Il est facile de voir que $h_j(0, t)$ s'annule à l'ordre 2 en 0. L'inclusion $M_1^+ \supset M_2^+$ implique que $h_1 \ge h_2$. En plus, par l'hypothèse (2.3) du Théorème 2.2, on s'aperçoit que $\mathrm{Hess}_t\, h_1(0, t)$ et $\mathrm{Hess}_t\, h_2(0, t)$ ont le même nombre de valeurs propres positives. L'injectivité de (3.2)' découle alors de la proposition suivante pour $m = 2n - 2l$, $h_j(t) = h_j(0, t)$, $T = \mathbf{R}^m$. Q.E.D.

Pour $h_j : T \to \mathbf{R}$ $(j = 1, 2)$ et $\delta, \varepsilon > 0$, soit

$$\begin{aligned}Z_j &= \{t \in T;\ h_j(t) \le 0\} \\ B_{\delta,\varepsilon} &= \{t \in T;\ |u| < \varepsilon\ \ |v, w| < \delta\varepsilon\}.\end{aligned}$$

Proposition 3.2. *Supposons*

(a) h_1 *et* h_2 *nulle à l'ordre* 2 *en* 0,

(b) $h_1 \geq h_2$,

(c) $\mathrm{Hess}\, h_1$ *et* $\mathrm{Hess}\, h_2$ *ont le même nombre* s^+ *de valeurs propres positives.*

Soit $d = m - s^+$. *Alors il existe* $\delta > 0$ *tel que pour tout* $0 < \varepsilon << 1$

(i) $\mathrm{R}\Gamma_c(Z_j \cap B_{\delta,\varepsilon}; \mathbf{C}_T) \cong A[d]$,

(ii) *le morphisme*

$$\mathrm{R}\Gamma_c(Z_1 \cap B_{\delta,\varepsilon}; \mathbf{C}_T) \longrightarrow \mathrm{R}\Gamma_c(Z_2 \cap B_{\delta,\varepsilon}; \mathbf{C}_T)$$

induit par le morphisme de restriction $\mathbf{C}_{Z_1} \to \mathbf{C}_{Z_2}$ *est un isomorphisme.*

Preuve. On choisi un système de coordonnées locales $(t) = (u, v, w)$ sur T avec $(u) = (u_1, \ldots, u_{s^+})$, $(v) = (v_1, \ldots, v_{s^-})$ tel que au voisinage de 0:

(3.3)
$$h_1(t) = Q_1(u) - v^2 + O(u)O(v) + O(|u|^3) + O(|v|^3),$$

(3.4)
$$h_2(t) = u^2 - [v^2 + Q_2(v, w)] - R_2(v, w) + O(u)O(v, w) + O(|u|^3) + O(|v|^3),$$

où Q_1, Q_2 sont des formes quadratiques avec $Q_1 > 0$, $Q_2 \geq 0$ et $0 \leq R_2(v, w) = O(w)O(v, w)$ (cf [D'A-Z 4]).

Alors pour quelque $0 < \delta < 1$ les petites racines des équations $h_1(u, v, w) = 0$ et $h_2(u, v, w) = 0$ satisfont

$$\delta|u| \leq |v, w|.$$

Soit $a_T : T \to \{0\}$ la projection. On se rappelle que

$$\mathrm{R}\Gamma_c(Z_j \cap B_{\delta,\varepsilon}; \mathbf{C}_T) \cong \mathrm{R}a_{T!}\mathbf{C}_{Z_j \cap B_{\delta,\varepsilon}}. \tag{3.5}$$

Factorisons a_T moyennant

$$T \xrightarrow{q} V \xrightarrow{a_V} \{0\},$$

où q est la restriction à T de la projection $\mathbf{R}^m_{u,v,w} \to \mathbf{R}^d_{v,w}$, et $V = q(T)$ (on peut supposer $T = B_{a,b}$ pour quelque $a, b > 0$). Si l'on prouve que pour $0 < \varepsilon << 1$, $|v, w| < \varepsilon$, l'ensemble $q^{-1}(v, w) \cap Z_j \cap B_{\delta,\varepsilon}$ est (non vide) compact et contractile, alors

$$\mathrm{R}q_! \mathbf{C}_{Z_j \cap B_{\delta,\varepsilon}} \cong \mathbf{C}_{B'_{\delta,\varepsilon}},$$

où $B'_{\delta,\varepsilon} = q(B_{\delta,\varepsilon}) = \{(v, w);\ |v, w| < \delta\varepsilon\}$. Dès que $\mathrm{R}a_{T!} = \mathrm{R}a_{V!} \circ \mathrm{R}q_!$ et $\mathrm{R}a_{V!}\mathbf{C}_{B'_{\delta,\varepsilon}} \cong A[d]$, par (3.5) l'assertion (i) s'en suit.

Prouvons que $q^{-1}(v, w) \cap Z_j \cap B_{\delta,\varepsilon}$ est compact et contractile. Pour $u_\circ \in \mathbf{R}^{s^+}_u$, $\lambda > 0$, soit $u = \lambda u_\circ$. En prenant par exemple $j = 1$, on a $h_1(\lambda u_\circ, v) = 0$ si et seulement si

$$[1 + O(\lambda)]\lambda^2 + a\lambda - [v^2 + O(|v|^3)] = 0$$

qui admet deux petites racines λ, le discriminant étant positif. Cela prouve (i).

Remarquons que $(\mathrm{R}q_! \mathbf{C}_{Z_j \cap B_{\delta,\varepsilon}})_{(v,w)} = \mathrm{R}\Gamma_c(C^j_{(v,w)}; \mathbf{C}_{\mathbf{R}^{m-d}_u})$ pour $C^j_{(v,w)} = q^{-1}(v, w) \cap Z_j \cap B_{\delta,\varepsilon}$. Par le même argument comme avant, pour prouver (ii) il suffit de montrer que le morphisme

$$\mathrm{R}\Gamma_c(C^1_{(v,w)}; \mathbf{C}_{\mathbf{R}^{m-d}_u}) \longrightarrow \mathrm{R}\Gamma_c(C^2_{(v,w)}; \mathbf{C}_{\mathbf{R}^{m-d}_u})$$

induit par le morphisme de restriction $\mathbf{C}_{C^1_{(v,w)}} \to \mathbf{C}_{C^2_{(v,w)}}$ est un isomorphisme pour tout $(v, w) \in B'_{\delta,\varepsilon}$. Ce qui est le cas dès que $C^1_{(v,w)}$, $C^2_{(v,w)}$ sont contractiles à un point commun. Q.E.D.

Remerciements

Nos remerciements vont ici à Pierre Schapira pour nous avoir posé ce problème et nous avoir suivi tout au long de sa solution, et à Jean-Pierre Schneiders pour des fréquentes discussions qui nous ont notamment permis d'aboutir à la formulation de la Proposition 3.2.

Références Bibliographiques

[D'A-Z 1] A. D'Agnolo, G. Zampieri, *Levi's forms of higher codimensional submanifolds*, Rend. Mat. Acc. Lincei, s. 9, **2** (1991), 29–33.

[D'A-Z 2] A. D'Agnolo, G. Zampieri, Generalized Levi forms for microdifferential systems (M. Kashiwara, T. Monteiro Fernandes, P. Schapira, eds.), D-modules and microlocal geometry, Walter de Gruyter & Co., 1992.

[D'A-Z 3] A. D'Agnolo, G. Zampieri, *Vanishing theorem for sheaves of microfunctions at the boundary on CR-manifolds*, Comm. in P.D.E. (1992).

[D'A-Z 4] A. D'Agnolo, G. Zampieri, *On microfunctions at the boundary along CR manifolds*, à paraître.

[K] M. Kashiwara, *Systems of microdifferential equations*, vol. 34, Progress in Math., Birkhauser, 1983.

[K-S 1] M. Kashiwara, P. Schapira, *Microlocal study of sheaves*, Astérisque **128** (1985).

[K-S 2] M. Kashiwara, P. Schapira, *A vanishing theorem for a class of systems with simple characteristics*, Inventiones Math. **82** (1985), 579–592.

[K-S 3] M. Kashiwara, P. Schapira, *Sheaves on manifolds*, Springer-Verlag **292** (1990).

[Ka] K. Kataoka, *Microlocal theory of boundary value problems I*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. 1A **27** (1980), 355-399; *II* **28** (1981), 31–56.

[M-Sj 1] A. Melin, J. Sjöstrand, *Fourier integral operators with complex phase functions*, Lect. Notes in Math., Springer **459** (1975), 120–223.

[M-Sj 2] A. Melin, J. Sjöstrand, *Fourier integral operators with complex phase functions and parametrix for an interior boundary value problem*, Comm. in P.D.E. **1** (1976), 313–400.

[S 1] P. Schapira, *Condition de positivité dans une variété symplectique complexe. Applications à l'étude des microfonctions*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **14** (1981), 121–139.

[S 2] P. Schapira, *Front d'onde analytique au bord I*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **302** **10** (1986), 383–386; *II*, Sém. E.D.P. Ecole Polytechnique Exp. 13 (1986).

[S-K-K] M. Sato, T. Kawaï, M. Kashiwara, *Hyperfunctions and pseudo-differential equations*, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag **287** (1973), 265–529.

[T-U] N. Tose, M. Uchida, *Negativity and vanishing of microfunction solution sheaves at the boundary*, Proc. Japan Acad., Ser. A **65** (1989), 288-291.

[Tr] J. M. Trépreau, *Systèmes differentiels à caractéristiques simples et structures réelles-complexes (d'après Baouendi-Trèves et Sato-Kawai-Kashiwara)*, Sémin. Bourbaki **595** (1981-82).