Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica
109° (1991), Vol. XV, fasc. 9, pagg. 151-162

FRANCESCO BOTTACIN (*)

Varietà Jacobiane di curve spettrali e funzioni theta (**)

RIASSUNTO. — In [5], D. Mumford dà una costruzione algebrica esplicita della varietà Jacobiana Jac (C) di una curva iperellittica. Una estensione alle curve spettrali della rappresentazione di Mumford è fornita da A. Beauville in [1]. Nel presente lavoro si estende alle curve spettrali la rappresentazione in funzioni theta delle coordinate algebriche su Jac (C) fornita da Mumford.

Jacobian Varieties of Spectral Curves and Theta Functions

SUMMARY. — In [5], D. Mumford described an explicit isomorphism between an open set of the Jacobian variety of a hyperelliptic curve C and a set of triples of polynomials satisfying certain conditions. Moreover he is able to express the coefficients of these polynomials in terms of Riemann's theta function of the curve C, thus providing an explicit expression for the algebraic coordinates on Jac (C) as theta functions.

A. Beauville generalized in [1] the algebraic construction of Mumford to the case of spectral curves. It turns out that an open set of the Jacobian variety of such a curve is isomorphic to the set of polynomial matrices of fixed degree whose characteristic polynomial is equal to the polynomial defining the spectral curve, modulo conjugation by PGL $(n, \mathbf{C})$.

In this paper we generalize the expressions of the algebraic coordinates on Jac (C) in terms of theta functions, given by Mumford in the case of a hyperelliptic curve, to the general case of spectral curves. Precisely, we give an expression for the coefficients of a matrix $A(x)$ corresponding to a line bundle L in the isomorphism given in [1], using the classical Riemann's theta function of the spectral curve.

INTRODUZIONE

In [5], partendo da un'idea di Jacobi, D. Mumford fornisce una costruzione algebrica esplicita della varietà jacobiana di una curva iperellittica. Precisamente, se C è la curva definita dall'equazione $y^2 = f(x)$, ove $f(x)$ è un polinomio monico di grado $2g+1$ (g è il genere di C), si ha un isomorfismo tra Jac $(C) \setminus \Theta$ ove Θ indica il divisore theta canonico di Jac (C), e l'insieme costituito dalle terne di polinomi $(U(x)$, $V(x)$,

(*) Indirizzo dell'A.: Dipartimento di Matematica Pura e Applicata dell'Università di Padova, via Belzoni 7; I-35131 Padova.

(**) Memoria presentata il 15 maggio 1991 da Giuseppe Scorza Dragoni, uno dei XL.

ISSN-0392-4106

$W(x)$), ove $U(x)$ è un polinomio monico di grado g, $V(x)$ ha grado $\leq g-1$ e $W(x)$ è monico di grado $g+1$, con la condizione $V(x)^2 + U(x)\,W(x) = f(x)$. Analizzando poi le relazioni tra tale descrizione algebrica e la classica descrizione analitica di $\mathrm{Jac}\,(C)$, si riescono ad esprimere i coefficienti del polinomio $U(x)$ in termini della funzione theta di Riemann della curva C. Con lo stesso metodo si possono poi trovare anche le analoghe espressioni per i polinomi $V(x)$ e $W(x)$ (anche se ciò non viene fatto da Mumford) e quindi si riescono ad esprimere le coordinate algebriche su $\mathrm{Jac}\,(C)\setminus\Theta$ come funzioni theta. Come applicazione di tali risultati, Mumford è in grado di fornire delle soluzioni esplicite per il sistema dinamico di Neumann, in quanto tale sistema dinamico si linearizza sulla varietà jacobiana di una curva iperellittica ad esso associata.

Partendo da altre considerazioni, A. Beauville generalizza in [1] la descrizione fornita da Mumford al caso delle curve spettrali. Sono, quest'ultime, delle curve definite da equazioni del tipo $\det\,(yI - A(x)) = 0$, ove $A(x)$ è una matrice quadrata di ordine n, a coefficienti polinomiali di grado $\leq d$. Se C_P indica la curva spettrale definita dal polinomio P (polinomio caratteristico di una matrice polinomiale $A(x)$), si ha un isomorfismo tra $\mathrm{Jac}\,(C_P)\setminus\Theta$ e la varietà $M_P/\mathrm{PGL}\,(n, \mathbb{C})$ ove M_P indica l'insieme delle matrici polinomiali con polinomio caratteristico uguale a P, su cui il gruppo $\mathrm{PGL}\,(n, \mathbb{C})$ agisce per coniugazione. Tale risultato generalizza la descrizione fornita da Mumford. Notiamo infatti che la terna $(U(x), V(x), W(x))$ si può far corrispondere alla matrice

$$A(x) = \begin{bmatrix} V(x) & U(x) \\ W(x) & -V(x) \end{bmatrix},$$

e la condizione $V(x)^2 + U(x)\,W(x) = f(x)$ si traduce nel fatto che l'equazione della curva C è esattamente l'equazione caratteristica di $A(x)$. Mumford, tuttavia, riesce ad evitare la necessità di passare al quoziente per $\mathrm{PGL}\,(2, \mathbb{C})$ scegliendo una opportuna normalizzazione per i polinomi $U(x)$, $V(x)$ e $W(x)$.

Lo scopo del presente lavoro è di estendere la descrizione fornita da Mumford delle coordinate algebriche su $\mathrm{Jac}\,(C)\setminus\Theta$ in termini delle funzioni theta al caso più generale delle curve spettrali. Precisamente ci proponiamo di trovare una descrizione esplicita delle matrici $A(x)$ che parametrizzano $\mathrm{Jac}\,(C_P)\setminus\Theta$ in termini della funzione theta di Riemann della curva C_P.

Questo articolo è organizzato come segue: nella Sezione 1, allo scopo di motivare l'introduzione e lo studio delle curve spettrali, richiamiamo brevemente alcuni noti risultati sulle equazioni di Lax del tipo $\dot{A}(x) = [B(x), A(x)]$ e le loro relazioni con tali curve. In seguito, nella Sezione 2, si descrivono i flussi indotti da una equazione di Lax sulla varietà jacobiana della curva spettrale ad essa associata. Tali flussi sono, nella maggioranza dei casi fisicamente interessanti, lineari, per la struttura di varietà abeliana di $\mathrm{Jac}\,(C_P)$, e pertanto questo metodo fornisce una linearizzazione esplicita di tali equazioni. Nella Sezione 3 si studiano in dettaglio le varietà jacobiane delle curve spettrali e, in particolare, si descrive in modo esplicito l'isomorfismo tra $\mathrm{Jac}\,(C_P)\setminus\Theta$ ed $M_P/\mathrm{PGL}\,(n, \mathbb{C})$. Inoltre si fornisce una descrizione dei campi vettoriali invarianti per traslazione su $\mathrm{Jac}\,(C_P)$ in termini di campi vettoriali su M_P invarianti per l'azione di $\mathrm{PGL}\,(n, \mathbb{C})$. Tali campi sono espressi in modo naturale tramite delle equazioni di Lax.

Nella Sezione 4, infine, si utilizzano i risultati precedenti per esprimere i coefficienti di una matrice $A(x)$ associata ad un fibrato in rette $L \in \mathrm{Jac}(C_P) \setminus \Theta$ in termini della funzione theta di Riemann della curva C_P.

Desidero qui ringraziare Arnaud Beauville, per aver suggerito l'idea del presente lavoro e per le utili discussioni avute con lui a questo riguardo.

1. - Equazioni di Lax e curve spettrali

Siano $n \geqslant 1$ e $d \geqslant 0$ due interi. Indichiamo con S_d lo spazio dei polinomi in una variabile x, a coefficienti complessi, di grado $\leqslant d$ e con $M(n, S_d)$ lo spazio delle matrici quadrate di ordine n a coefficienti in S_d. Sia $A(x, t)$, per $t \in \mathbf{C}$, una curva in $M(n, S_d)$. Diremo che $A(x, t)$ soddisfa una equazione di Lax se esiste una matrice $B(x, t) \in M(n, S_{d'})$, con d' eventualmente diverso da d, dipendente in generale da $A(x, t)$, tale che si abbia:

$$\dot{A}(x, t) = [B(x, t), A(x, t)], \tag{1.1}$$

ove $\dot{A}(x, t) = \partial A(x, t)/\partial t$ e $[B, A] = BA - AB$. Si noti che la matrice $B(x, t)$ è determinata da (1.1) solo modulo l'aggiunta di elementi che appartengono al commutatore di $A(x, t)$.

Sia x una coordinata affine sulla retta proiettiva $\boldsymbol{P}^1$. Indichiamo con X lo spazio totale del fibrato in rette $\mathcal{O}_{\boldsymbol{P}^1}(d)$ e con $\pi: X \to \boldsymbol{P}^1$ la proiezione canonica. X può essere descritto come l'insieme delle coppie (x, ξ), ove $x \in \boldsymbol{P}^1$ e $\xi \in \mathcal{O}_{\boldsymbol{P}^1}(d)_x$, e la proiezione π mappa la coppia (x, ξ) nel punto x. Se ricopriamo $\boldsymbol{P}^1$ con gli aperti $U_0 = \boldsymbol{P}^1 \setminus \{\infty\}$, con coordinata x, ed $U_1 = \boldsymbol{P}^1 \setminus \{0\}$ con coordinata x', ove $x' = x^{-1}$ su $U_0 \cap U_1$, allora X può essere ricoperto con gli aperti $\pi^{-1}(U_0)$, con coordinate (x, ξ) e $\pi^{-1}(U_1)$, con coordinate (x', ξ'), ove $x' = x^{-1}$ e $\xi' = \xi / x^d$ su $\pi^{-1}(U_0) \cap \pi^{-1}(U_1)$.

Indichiamo con $y \in H^0(X, \pi^* \mathcal{O}_{\boldsymbol{P}^1}(d))$ la sezione tautologica, definita da $y: (x, \xi) \mapsto \xi$, e sia $P(x, y) = \det(yI - A(x, t))$ il polinomio caratteristico della matrice $A(x, t)$. Dall'equazione (1.1) si deduce che il polinomio $P(x, y)$ è indipendente da t, cioè è un «invariante» per il flusso definito da tale equazione. Tale polinomio definisce allora una sezione globale del fibrato in rette $\pi^* \mathcal{O}_{\boldsymbol{P}^1}(nd)$ su X il cui divisore è una curva completa $C_P \subset X$. La restrizione della proiezione canonica $\pi: C_P \to \boldsymbol{P}^1$ esprime la curva C_P come un ricoprimento ramificato ad n fogli di $\boldsymbol{P}^1$. Se $x_0 \in \boldsymbol{P}^1$, si ha $\pi^{-1}(x_0) = \{(x_0, y_1), \ldots, (x_0, y_n)\}$, dove $y_1, \ldots, y_n$ sono le radici, genericamente distinte, dell'equazione caratteristica della matrice $A(x, t)$. Da quanto detto in precedenza, si deduce subito che la curva $C_P \subset X$ è una compattificazione della curva affine C_P^0 definita dalla equazione $\det(yI - A(x, t)) = 0$ in $\mathbf{C}^2 \cong \pi^{-1}(U_0) \subset X$. L'introduzione dello spazio X ha lo scopo di rendere la curva C_P nonsingolare sopra il punto all'infinito di $\boldsymbol{P}^1$.

La curva C_P così definita è la *curva spettrale* associata all'equazione (1.1) ed è un invariante di fondamentale importanza nello studio di tali equazioni.

Nel seguito supporremo, per semplicità, che la curva C_P sia liscia, anche se quasi tutto quello che diremo rimane vero nel caso si sostituisca la curva singolare C_P con una sua normalizzazione.

2. - Linearizzazione dei flussi di Lax

Nella sezione precedente abbiamo visto come la fibra della mappa $\pi: C_P \to \boldsymbol{P}^1$ nel punto generico x di $\boldsymbol{P}^1$ sia costituita da n punti distinti di C_P. Questo significa che la matrice $A(x, t)$, per x generico, ha n autovalori distinti e, pertanto, ha tutti gli spazi propri di dimensione uno. Ciò permette di definire una mappa che al generico punto $(x, y) \in C_P$ associa lo spazio proprio della matrice $A(x, t)$ relativo al valore proprio y. Tale mappa, definita solo su un aperto di C_P, si estende in modo unico ad una mappa olomorfa $\phi_t: C_P \to \boldsymbol{P}^{n-1}$ (vedi [3]). Indichiamo con $E_t = \phi_t^* \mathcal{O}_{\boldsymbol{P}^{n-1}}(1)$ il pull-back del fibrato in rette canonico su $\boldsymbol{P}^{n-1}$. Si noti che, mentre i valori propri della matrice $A(x, t)$ sono indipendenti da t, i corrispondenti vettori propri dipendono effettivamente da t. L'evoluzione del fibrato E_t al variare di t, descrive essenzialmente l'evoluzione dei sottospazi propri della matrice $A(x, t)$ e quindi l'evoluzione della matrice stessa. Se l'immagine di ϕ_t è una curva di grado δ in $\boldsymbol{P}^{n-1}$, la mappa $t \mapsto E_t \in \mathrm{Pic}^{\delta}(C_P) \cong \mathrm{Jac}(C_P)$ definisce un flusso sulla varietà jacobiana della curva C_P. Può accadere, ed in effetti accade nella grande maggioranza dei casi fisicamente interessanti, che tale flusso sia lineare, per la struttura di varietà abeliana di $\mathrm{Jac}(C_P)$. In tal caso il flusso è, in generale, quasi-periodico (oppure effettivamente periodico, in casi particolari), ed ammette, almeno in teoria, una rappresentazioone esplicita in termini di funzioni theta. In altre parole, l'equazione di Lax (1.1) si linearizza sulla varietà jacobiana della curva spettrale ad essa associata.

La condizione affinché il flusso $t \mapsto E_t$ sia lineare ammette anch'essa una rappresentazione esplicita in termini della matrice $B(x, t)$. Sia

$$B(x, t) = \sum_{i=0}^{N} B_i x^i ,$$

con $B_N \neq 0$, e sia D il divisore $N \cdot \pi^{-1}(\infty)$ su C_P. Data la mappa $\phi_t: C_P \to \boldsymbol{P}^{n-1}$, scegliamo un suo rialzamento locale $(x, y) \mapsto v(x, y, t)$ a $\mathbf{C}^n \setminus \{0\}$. $v(x, y, t)$ non è altro che un vettore proprio della matrice $A(x, t)$ relativo al valore proprio y, si ha cioè: $A(x, t)\, v(x, y, t) = yv(x, y, t)$. Derivando rispetto a t, si ottiene: $\dot{A}\, v + A\dot{v} = y\dot{v}$, ed usando l'equazione (1.1), si ha: $A(\dot{v} - Bv) = y(\dot{v} - Bv)$.

Dall'ipotesi che i sottospazi propri di $A(x, t)$ abbiano generalmente dimensione uno, segue che $Bv = \dot{v} + \lambda v$, per qualche $\lambda \in H^0(C_P, \mathcal{O}_{C_P}(D))$ unicamente determinato da B.

Consideriamo la sequenza esatta

$$0 \to \mathcal{O}_{C_P} \to \mathcal{O}_{C_P}(D) \xrightarrow{\rho} \mathcal{O}_D(D) \to 0 ,$$

e chiamiamo *residuo* di B, in simboli $\mathrm{res}(B)$, la sezione $\rho(\lambda) \in H^0(C_P, \mathcal{O}_D(D))$ indotta da λ. Si ha il seguente risultato ([3, Corollario 7.8]):

Teorema 2.1: *Il flusso $t \mapsto E_t$ in $\mathrm{Pic}^{\delta}(C_P)$ indotto dall'equazione* (1.1) *è lineare se e solo se la derivata del residuo di B, fatta rispetto a t, appartiene al sottospazio di $H^0(C_P, \mathcal{O}_D(D))$ generato da $\rho(H^0(C_P, \mathcal{O}_{C_P}(D)))$ e* $\mathrm{res}(B)$.

La condizione espressa dal precedente Teorema è, almeno nei casi classici, effettivamente e facilmente verificabile. Per ulteriori dettagli e per esempi di applicazione di tale Teorema ad equazioni di Lax provenienti dalla fisica, si rimanda all'articolo di Griffiths summenzionato.

3. - Varietà jacobiane di curve spettrali

Passiamo ora a studiare più in dettaglio la varietà jacobiana di una curva spettrale. Sia dunque $A(x) \in M(n, S_d)$ e sia C_P la curva spettrale definita dal polinomio $P(x,y) = \det(yI - A(x)) = y^n + a_1(x)y^{n-1} + \ldots + a_n(x)$, dove $a_1(x), \ldots, a_n(x)$ sono polinomi in x con $\deg a_i(x) \leqslant id$. Sia inoltre $\pi\colon C_P \to \boldsymbol{P}^1$ l'applicazione che esprime C_P come un ricoprimento ramificato ad n fogli di $\boldsymbol{P}^1$. In termini intrinseci la curva C_P può essere definita come segue: sia $a_i\colon \mathcal{O}_{\boldsymbol{P}^1}(-nd) \to \mathcal{O}_{\boldsymbol{P}^1}(-(n-i)d)$ il morfismo indotto dalla moltiplicazione per il polinomio $a_i(x)$, con la convenzione che $a_0 = 1$, e sia $\mathfrak{J}$ il fascio di ideali generato dall'immagine dell'omomorfismo $\bigoplus a_i\colon \mathcal{O}_{\boldsymbol{P}^1}(-nd) \to \mathrm{Sym}(\mathcal{O}_{\boldsymbol{P}^1}(-d))$, ove $\mathrm{Sym}(\mathcal{O}_{\boldsymbol{P}^1}(-d))$ indica l'algebra simmetrica di $\mathcal{O}_{\boldsymbol{P}^1}(-d)$. Si ha allora un isomorfismo $C_P \cong \mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}(\mathcal{O}_{\boldsymbol{P}^1}(-d))/\mathfrak{J})$ da cui si deduce che $\pi_* \mathcal{O}_{C_P} \cong \bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathcal{O}_{\boldsymbol{P}^1}(-id)$, in quanto $\mathcal{O}_{\boldsymbol{P}^1}$-moduli. Questo permette di calcolare il genere g di C_P:

$$g = \dim H^1(C_P, \mathcal{O}_{C_P}) = \dim H^1(\boldsymbol{P}^1, \pi_* \mathcal{O}_{C_P}) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \dim H^1(\boldsymbol{P}^1, \mathcal{O}_{\boldsymbol{P}^1}(-id)) = \frac{(n-1)(dn-2)}{2}.$$

Osservazione 3.1: Il genere di C_P si può anche calcolare applicando la formula di Riemann-Hurwitz al ricoprimento $\pi\colon C_P \to \boldsymbol{P}^1$, dopo aver calcolato il grado del divisore di ramificazione (vedi [3]).

Osservazione 3.2: Al di sopra della retta affine $\boldsymbol{P}^1 \setminus \{\infty\}$, l'algebra simmetrica $\mathrm{Sym}(\mathcal{O}_{\boldsymbol{P}^1}(-d))$ non è altro che il fascio di algebre associato a $\mathbb{C}[x,y]$, pensato come $\mathbb{C}[x]$-algebra, e $\mathfrak{J}$ è il fascio di ideali corrispondente all'ideale generato dal polinomio $P(x,y)$. Pertanto la parte affine $\pi^{-1}(\boldsymbol{P}^1 \setminus \{\infty\})$ di C_P non è altro che $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x,y]/(P(x,y)))$.

Sia ora L un fibrato in rette su C_P. $E = \pi_* L$ è un fibrato vettoriale di rango n su $\boldsymbol{P}^1$ dotato di una struttura di $\pi_* \mathcal{O}_{C_P}$-modulo. Viceversa si può dimostrare che il dato di un fibrato vettoriale E di rango n su $\boldsymbol{P}^1$ dotato di una struttura di $\pi_* \mathcal{O}_{C_P}$-modulo individua un unico fibrato in rette L su C_P, tale che $\pi_* L = E$ (vedi [1]). Una struttura di $\pi_* \mathcal{O}_{C_P}$-modulo su E non è altro che un omomorfismo di fasci di algebre $\Phi\colon \pi_* \mathcal{O}_{C_P} \to End(E)$, il quale è equivalente, visto l'isomorfismo

$$\pi_* \mathcal{O}_{C_P} \cong \mathrm{Sym}(\mathcal{O}_{\boldsymbol{P}^1}(-d))/\mathfrak{J},$$

al dato di una applicazione $\mathcal{O}_{\boldsymbol{P}^1}$-lineare $\phi\colon E \to E(d)$, tale che $P(\phi) = 0$. Considerata l'irriducibilità del polinomio P, questo implica che P è il polinomio caratteristico di ϕ.

Abbiamo quindi una biiezione tra l'insieme dei fibrati in rette su C_P e l'insieme delle coppie (E, ϕ), dove E è un fibrato vettoriale di rango n su $\boldsymbol{P}^1$ e $\phi: E \to E(d)$ è un omomorfismo con polinomio caratteristico uguale a P.

Ora specializziamo la scelta di L. Sia $J^{g-1}(C_P)$ l'insieme delle classi di isomorfismo dei fibrati in rette di grado $g-1$ su C_P e sia $\Theta = \{L \in J^{g-1}(C_P) | H^0(C_P, L) \neq 0\}$. È ben noto che $J^{g-1}(C_P)$ è una varietà isomorfa (non canonicamente) alla varietà jacobiana $\mathrm{Jac}(C_P)$ di C_P e che, in tale isomorfismo, Θ corrisponde, a meno di traslazione, al divisore theta canonico di $\mathrm{Jac}(C_P)$. Sia allora $L \in J^{g-1}(C_P) \setminus \Theta$. Dal teorema di Riemann-Roch si deduce che $H^0(C_P, L) = H^1(C_P, L) = 0$ e, di conseguenza, $E = \pi_* L$, avendo coomologia nulla, deve essere isomorfo a $\mathcal{O}_{\boldsymbol{P}^1}(-1)^{\oplus n}$. Se $\lambda: \mathcal{O}_{\boldsymbol{P}^1}(-1)^{\oplus n} \to E$ è un tale isomorfismo, il dato di $\phi: E \to E(d)$ equivale al dato di $\lambda^{-1}\phi\lambda: \mathcal{O}_{\boldsymbol{P}^1}(-1)^{\oplus n} \to$ $\to \mathcal{O}_{\boldsymbol{P}^1}(d-1)^{\oplus n}$, cioè al dato di una matrice $A(x) \in M(n, S_d)$ con polinomio caratteristico uguale a P. Ogni altro isomorfismo $\lambda': \mathcal{O}_{\boldsymbol{P}^1}(-1)^{\oplus n} \to E$ si ottiene componendo λ con un automorfismo di $\mathcal{O}_{\boldsymbol{P}^1}(-1)^{\oplus n}$, che corrisponde ad una matrice $G \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. La matrice corrispondente a λ' è di conseguenza $A'(x) = G^{-1} A(x) G$.

Se indichiamo con $M_P(n, S_d)$ la sottovarietà di $M(n, S_d)$ costituita dalle matrici con polinomio caratteristico uguale a P, su cui il gruppo $\mathrm{PGL}(n, \mathbb{C})$ agisce per coniugazione, abbiamo così stabilito un morfismo $M_P(n, S_d) \to J^{g-1}(C_P) \setminus \Theta$ le cui fibre sono le orbite di $\mathrm{PGL}(n, \mathbb{C})$ in $M_P(n, S_d)$. Se una matrice $B(x) \in M(n, S_d) \setminus \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ commuta con $A(x)$, i suoi sottospazi propri sono invarianti per $A(x)$, ma questo contraddice l'irriducibilità di P. Pertanto lo stabilizzatore di una matrice qualunque $A(x)$ è ridotto all'elemento neutro. Si deduce allora, da risultati generali sulle varietà quozienti (vedi [6]), che $M_P(n, S_d)$ è un fibrato principale di gruppo $\mathrm{PGL}(n, \mathbb{C})$ su $J^{g-1}(C_P) \setminus \Theta$. Abbiamo così dimostrato il

TEOREMA 3.3 [1, TEOREMA 1.4]: *Sia*

$$M_P(n, S_d) = \{A(x) \in M(n, S_d) | \det(yI - A(x)) = P(x, y)\}$$

e sia C_P la curva spettrale definita dal polinomio $P(x, y)$. Si ha un isomorfismo

$$J^{g-1}(C_P) \setminus \Theta \cong M_P(n, S_d) / \mathrm{PGL}(n, \mathbb{C}),$$

ove $\mathrm{PGL}(n, \mathbb{C})$ *agisce su* $M_P(n, S_d)$ *per coniugazione.*

Diamo ora una descrizione esplicita della matrice $A(x)$ associata ad un fibrato in rette $L \in J^{g-1}(C_P) \setminus \Theta$ e ad un isomorfismo $\lambda: \mathcal{O}_{\boldsymbol{P}^1}(-1)^{\oplus n} \to \pi_* L$. Poniamo $L(1) =$ $= L \otimes \pi^* \mathcal{O}_{\boldsymbol{P}^1}(1)$. $L(1)$ ha grado $g-1+n$ e dal Teorema di Riemann-Roch si deduce che $\dim H^0(C_P, L(1)) = n$. L'isomorfismo λ induce un isomorfismo $\lambda(1): \mathcal{O}_{\boldsymbol{P}^1}^{\oplus n} \to \pi_* L(1)$, il quale è equivalente alla scelta di una base di $H^0(C_P, L(1))$. La sezione tautologica y induce una sezione globale di $\pi^* \mathcal{O}_{\boldsymbol{P}^1}(d)$ su C_P che, a sua volta, definisce un omomorfismo $H^0(C_P, L(1)) \to H^0(C_P, L(1) \otimes \pi^* \mathcal{O}_{\boldsymbol{P}^1}(d))$. Dalla formula di proiezione $\pi_*(L(1) \otimes \pi^* \mathcal{O}_{\boldsymbol{P}^1}(d)) \cong \pi_* L(1) \otimes \mathcal{O}_{\boldsymbol{P}^1}(d)$, si deriva un isomorfismo $H^0(C_P, L(1) \otimes$ $\otimes \pi^* \mathcal{O}_{\boldsymbol{P}^1}(d)) \cong H^0(C_P, L(1)) \otimes S_d$ e quindi, in conclusione, la moltiplicazione per y definisce un omomorfismo $y: H^0(C_P, L(1)) \to H^0(C_P, L(1)) \otimes S_d$. Da quanto visto nel corso della dimostrazione del Teorema 3.3, si deduce che $A(x)$ è la matrice di tale omomorfismo rispetto alla base di $H^0(C_P, L(1))$ definita da $\lambda(1)$.

Per completare la descrizione della varietà jacobiana della curva spettrale C_P rimangono solo da descrivere i campi di vettori invarianti per traslazione su $\mathrm{Jac}(C_P)$. Visto l'isomorfismo dato dal Teorema 3.3, un campo di vettori invariante per traslazione su $\mathrm{Jac}(C_P)$ corrisponde ad un campo vettoriale su $M_P(n, S_d)$, invariante per l'azione di $\mathrm{PGL}(n, \mathbf{C})$. A tale riguardo citiamo il seguente risultato, per la cui dimostrazione rimandiamo a [1]:

Teorema 3.4: *Per ogni $\lambda \in \mathbf{C}$ ed $i \in \mathbf{N}$, la mappa*

$$A(x) \mapsto \left[\frac{A^i(\lambda)}{x-\lambda}, A(x) \right]$$

definisce un campo di vettori su $M_P(n, S_d)$ invariante per l'azione di $\mathrm{PGL}(n, \mathbf{C})$. Le immagini di tali campi in $M_P(n, S_d)/\mathrm{PGL}(n, \mathbf{C})$ commutano tra loro e generano lo spazio dei campi di vettori invarianti per traslazione su $J^{g-1}(C_P)\setminus\Theta$.

Osservazione 3.5: Notiamo che

$$\left[\frac{A^i(\lambda)}{x-\lambda}, A(x) \right] = \left[\frac{A^i(\lambda) - A^i(x)}{x-\lambda}, A(x) \right] = [B(x), A(x)],$$

ove $B(x) \in M(n, S_{id-1})$.

Osservazione 3.6: Consideriamo un flusso di Lax sulla varietà $M_P(n, S_d)/$ $/\mathrm{PGL}(n, \mathbf{C})$ definito dall'equazione

$$\dot{A}(x) = \left[\frac{A^i(\lambda)}{x-\lambda}, A(x) \right], \tag{3.7}$$

ove la matrice $A(x)$ è determinata solo modulo coniugazione per elementi di $\mathrm{PGL}(n, \mathbf{C})$. Se scriviamo $A(x) = \sum_{i=0}^{d} A_i x^i$, si deduce subito, confrontando i gradi dei due membri di (3.7), che $\dot{A}_d = 0$. In altre parole, lungo il flusso $t \mapsto A(x, t)$ descritto da tale equazione, il termine di grado massimo A_d si mantiene costante. Possiamo quindi fissare in modo sensato un tale elemento $\overline{A}_d$ e considerare il sottoinsieme dell'orbita di $A(x)$ per l'azione di $\mathrm{PGL}(n, \mathbf{C})$ costituito dalle matrici il cui termine di grado massimo sia uguale ad $\overline{A}_d$. Tale insieme non è altro che l'orbita di un qualunque suo elemento per l'azione del sottogruppo $C(\overline{A}_d)$ di $\mathrm{PGL}(n, \mathbf{C})$ che fissa $\overline{A}_d$, cioè del commutatore di $\overline{A}_d$. Ad esempio, se supponiamo che la fibra di $\pi: C_P \to \boldsymbol{P}^1$ sopra il punto all'infinito di $\boldsymbol{P}^1$ sia costituita da n punti distinti, il che equivale a supporre che la matrice A_d abbia n autovalori distinti e sia pertanto diagonalizzabile, possiamo scegliere come $\overline{A}_d$ la forma canonica diagonale di A_d. In tal caso il commutatore di $\overline{A}_d$ è costituito dalle matrici diagonali. Se indichiamo con $\overline{M}_P = \{A(x) \in M_P(n, S_d) | A_d = \overline{A}_d\}$, il gruppo $C(\overline{A}_d)$ agisce per coniugazione su $\overline{M}_P$ e si ha un isomorfismo $\overline{M}_P/C(\overline{A}_d) \cong$ $\cong M_P(n, S_d)/\mathrm{PGL}(n, \mathbf{C})$. Per quanto visto in precedenza, il flusso indotto da (3.7) su $\overline{M}_P/C(\overline{A}_d)$ ha ancora la stessa formulazione.

4. - Funzioni theta

In questa sezione ci proponiamo di trovare una rappresentazione esplicita delle matrici $A(x)$ corrispondenti ad un fibrato in rette $L \in J^{g-1}(C) \setminus \Theta$ in termini della funzione theta di Riemann della curva C.

Premettiamo un'osservazione che sarà utile nel seguito. Nella Sezione 1 abbiamo visto che, se $\dot{A}' = [B, A']$ è una equazione di Lax e se $C \subset X$ è la curva spettrale ad essa associata, definita dall'equazione $\det(yI - A'(x)) = 0$, otteniamo una mappa olomorfa $\phi_t : C \to \boldsymbol{P}^{n-1}$ associando al generico punto (x, y) di C lo spazio proprio (genericamente di dimensione uno) della matrice $A'(x, t)$ relativo al valore proprio y. Se poniamo $E_t = \phi_t^* \mathcal{O}_{\boldsymbol{P}^{n-1}}(1)$, la mappa $t \mapsto E_t$ definisce un flusso sulla varietà jacobiana della curva C e tale flusso è equivalente al flusso di matrici $t \mapsto A'(x, t)$. Dalla definizione data si deduce subito che il fibrato E_t è il duale del fibrato in rette su C la cui fibra sopra il punto generico (x, y) è lo spazio proprio della matrice $A'(x, t)$ relativo al valore proprio y. Si ha pertanto la seguente sequenza esatta di fibrati su X:

$$0 \to E_t^* \to \mathcal{O}_X^{\oplus n} \xrightarrow{yI - A'(x)} \mathcal{O}_X(d)^{\oplus n} \to 0, \tag{4.1}$$

ove si è indicato ancora con E_t^* l'estensione con zero di tale fibrato a tutto lo spazio X.

Per dualità si trova che il fibrato E_t o, più precisamente, la sua estensione con zero ad X, può essere definito dalla sequenza esatta

$$0 \to \mathcal{O}_X(-d)^{\oplus n} \xrightarrow{yI - A'(x)^T} \mathcal{O}_X^{\oplus n} \to E_t \to 0. \tag{4.2}$$

Seguendo [7], ad esempio, si può dimostrare che E_t è un fibrato in rette di grado $n + g - 1$. Pertanto, se poniamo $E_t(-1) = E_t \otimes \pi^* \mathcal{O}_{\boldsymbol{P}^1}(-1)$, si ha $E_t(-1) \in J^{g-1}(C)$. Diremo che E_t è *generico* nel caso $E_t(-1) \in J^{g-1}(C) \setminus \Theta$. Sotto tale ipotesi, al fibrato $E_t(-1)$ resta associata, con il metodo descritto nella Sezione 3, una matrice polinomiale $A(x)$. Da quanto visto nelle sezioni precedenti e da quanto detto sopra si deduce facilmente che tale matrice coincide con la trasposta della matice $A'(x)$ usata per definire il fibrato E_t: $A(x) = A'(x)^T$. Questo chiarisce la relazione tra i diversi metodi descritti nelle Sezioni 2 e 3 rispettivamente.

Occupiamoci ora della matrice $A(x)$. Per quanto detto in seguito al Teorema 3.3, tale matrice può essere descritta come la matrice del morfismo $y: H^0(C, E_t) \to H^0(C, E_t) \otimes S_d$, rispetto ad una qualche base di $H^0(C, E_t)$. Sia D_t un divisore che rappresenta il fibrato in rette E_t, cioè il divisore di una sezione globale di E_t, e sia $\mathcal{L}(D_t)$ l'insieme delle funzioni meromorfe f su C, tali che $(f) + D_t \geqslant 0$. Come ben noto, lo spazio $H^0(C, E_t)$ è canonicamente identificato a $\mathcal{L}(D_t)$. Dalla sequenza esatta (4.2), si deduce che il divisore D_t può essere descritto come segue: se $s \in H^0(X, \mathcal{O}_X^{\oplus n}) \cong \mathbf{C}^n$, D_t è dato dalla somma dei punti $P \in C$ tali che $s(P)$ appartenga all'immagine di $yI - A'(x)^T = yI - A(x)$ in P. Se $(yI - A(x))_{\mathrm{adj}}$ indica la matrice aggiunta di $yI - A(x)$, allora, dalla relazione $(yI - A(x))_{\mathrm{adj}} \cdot (yI - A(x)) = \det(yI - A(x)) \cdot I$, si deduce che D_t è dato dalla somma dei punti ove $(yI - A(x))_{\mathrm{adj}} \cdot s = 0$, al di fuori del luogo dei punti ove $(yI - A(x))_{\mathrm{adj}} = 0$.

Sia $x_0 \in \boldsymbol{P}^1$ tale che $D_{x_0} = \pi^{-1}(x_0)$ sia costituito da n punti distinti $P_1, \dots, P_n$ di C, ordinati in qualche modo fissato. Si ha la sequenza esatta:

$$0 \to \mathcal{O}_C(-1) \to \mathcal{O}_C \to \mathcal{O}_{D_{x_0}} \to 0 .$$

Tensorizzando con E_t, prendendo la sequenza esatta lunga di coomologia associata e ricordando che l'ipotesi di genericità di E_t implica che $H^0(C, E_t(-1)) = H^1(C, E_t(-1)) = 0$, si ottiene l'isomorfismo $H^0(C, E_t) \xrightarrow{\text{res}} H^0(D_{x_0}, E_t)$, dato dalla restrizione delle sezioni a D_{x_0}, ossia dalla valutazione delle sezioni nei punti P_i del supporto di D_{x_0}.

Da quanto visto in precedenza, si ottiene il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} H^0(C, E_t) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "A(x_0)"'] & H^0(D_{x_0}, E_t) \arrow[d, "Y(x_0)"] \\ H^0(C, E_t) \arrow[r, "\simeq"] & H^0(D_{x_0}, E_t) \end{tikzcd} \tag{4.3}$$

ove

$$H^0(D_{x_0}, E_t) \cong \mathbb{C}^n \qquad \text{e} \qquad Y(x_0) = \begin{bmatrix} y(P_1) & & \\ & \ddots & \\ & & y(P_n) \end{bmatrix}.$$

Se indichiamo con $f_1, \dots, f_n$ una base di $\mathcal{L}(D_t) \cong H^0(C, E_t)$ e con $F(x_0)$ la matrice il cui elemento di posto (i, j) è dato da $f_j(P_i)$, dal diagramma (4.3) segue che $A(x_0) = F(x_0)^{-1} Y(x_0) F(x_0)$. Questo fornisce l'espressione della matrice $A(x)$ valutata in x_0. Per x in un intorno sufficientemente piccolo di x_0, il divisore $D_x = \pi^{-1}(x)$ consiste ancora di n punti distinti, ai quali possiamo estendere in modo continuo l'ordinamento fissato per D_{x_0}. Lo stesso calcolo precedentemente svolto si applica quindi anche ad $A(x)$. Dato inoltre che $A(x)$ è una matrice polinomiale, la sua conoscenza in un intorno di x_0 la determina globalmente. Se scegliamo un'altra base di $H^0(C, E_t)$, la nuova matrice $A'(x)$ differisce da $A(x)$ solo per coniugazione per un elemento di $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. A questo punto, per trovare una espressione per $A(x)$ in termini delle funzioni theta, non rimane altro da fare che esprimere in termini di tali funzioni una base $f_1, \dots, f_n$ di $H^0(C, E_t)$.

Come abbiamo già osservato, non esiste una base canonica per $H^0(C, E_t)$, tuttavia, se la matrice

$$A(x) = \sum_{i=0}^{d} A_i x^i$$

deve soddisfare una equazione di Lax del tipo (3.7), ossia se il flusso indotto sulla varietà jacobiana deve essere lineare, il coefficiente del termine di grado massimo, $A_d = A(\infty)$, deve essere costante e di conseguenza anche i valori delle funzioni f_i nei punti di C sopra il punto all'infinito di $\boldsymbol{P}^1$ devono essere costanti. L'idea è, pertanto, di cercare una base di $H^0(C, E_t)$ fissando i valori delle funzioni nei punti all'infinito della curva C.

Supponiamo che $D_\infty = \pi^{-1}(\infty)$ sia costituito da n punti distinti $\infty_1, \ldots, \infty_n$, e sia $D^i_\infty = D_\infty \setminus \{\infty_i\}$. Per l'ipotesi di genericità di E_t, si ha $\dim H^0(C, \mathcal{O}_C(D_t - D^i_\infty)) = 1$, per $i = 1, \ldots, n$. Una sezione globale del fascio $\mathcal{O}_C(D_t - D^i_\infty)$ è rappresentata da una funzione meromorfa con poli limitati da D_t e zeri in ∞_j, per $j \neq i$, pertanto tali sezioni rappresentano anche sezioni globali del fibrato in rette E_t. Per ogni $i = 1, \ldots, n$ sia $f_i \in H^0(C, \mathcal{O}_C(D_t - D^i_\infty))$. Dato che $H^0(C, \mathcal{O}_C(D_t - D_\infty)) = 0$, si ha $f_i(\infty_i) \neq 0$ pertanto possiamo richiedere che le f_i siano normalizzate in modo che $f_i(\infty_i) = 1$, per ogni $i =$ $= 1, \ldots, n$. Le funzioni $f_1, \ldots, f_n$ così definite sono unicamente determinate e formano una base di $H^0(C, E_t)$. Ora vediamo come si possono esprimere le f_i in termini di funzioni theta.

Scegliamo una base canonica $\{a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g\}$ di $H_1(C, \mathbf{Z})$, in modo che $(a_i \cdot a_j) = (b_i \cdot b_j) = 0$ e $(a_i \cdot b_j) = \delta_{ij}$, ove $(\cdot)$ indica la dualità su $H_1(C, \mathbf{Z})$ data dal numero di intersezione di due cicli. Sia $\omega_1, \ldots, \omega_g$ una base di $H^0(C, \Omega^1)$ normalizzata rispetto a $\{a_i, b_i\}$, cioè tale che $\int_{a_i} \omega_j = \delta_{ij}$. Sia Ω la matrice dei b-periodi, $\Omega_{ij} = \int_{b_i} \omega_j$. La varietà jacobiana di C è, per definizione, il toro complesso $\mathrm{Jac}(C) = \mathbf{C}^g / \mathbf{Z}^g + \Omega \mathbf{Z}^g$. Sia $\vartheta(z) =$ $= \vartheta(z, \Omega) = \sum_{n \in \mathbf{Z}^g} \exp(\pi i n^T \Omega n + 2\pi i n^T z)$, per $z \in \mathbf{C}^g$, la funzione theta di Riemann della curva C e sia $\mu: C \times C \to \mathrm{Jac}(C)$ la mappa di Abel, definita da

$$\mu(P, Q) = \left(\int_P^Q \omega_1, \ldots, \int_P^Q \omega_g \right).$$

Dalla definizione di f_i, si deduce che $(f_i) + D_t - D^i_\infty$ è un divisore positivo di grado g, indichiamolo con $P^i_1 + \ldots + P^i_g$. Ne deriva che f_i è l'unica funzione meromorfa con poli limitati da D_t e con zeri in $\sum_{j=1}^{g} P^i_j + D^i_\infty$ tale che $f_i(\infty_i) = 1$.

Da risultati classici della teoria delle funzioni theta, sappiamo che è possibile trovare una costante $\lambda \in \mathbf{C}^g$ tale che $\vartheta(\lambda) = 0$ e tale che, per ogni $j = 1, \ldots, g$, le funzioni $\vartheta(\lambda + \mu(P^i_j, z))$, $\vartheta(\lambda + \mu(\infty_j, z))$ e $\vartheta(\lambda + \mu(D^j_t, z))$ non siano identicamente nulle, ove si è posto $D_t = \sum_j D^j_t$. È noto inoltre che il divisore di $\vartheta(\lambda + \mu(x, y))$ su $C \times C$ è la somma della diagonale più componenti del tipo $\{R_i\} \times C$ e $C \times \{S_i\}$, per $i = 1, \ldots, g-1$, ove R_i ed S_i sono $2g - 2$ punti fissi. Da ciò si deduce che la funzione

$$\tilde{f}_i(z) = \frac{\prod_{j=1}^{g} \vartheta(\lambda + \mu(P^i_j, z)) \cdot \prod_{j \neq i} \vartheta(\lambda + \mu(\infty_j, z))}{\prod_{j=1}^{g+n-1} \vartheta(\lambda + \mu(D^j_t, z))} \tag{4.4}$$

ha lo stesso divisore della funzione f_i. Dall'unicità delle f_i si deduce allora che $f_i(z) = \tilde{f}_i(z) / \tilde{f}_i(\infty_i)$.

Per le f_i si può trovare anche un'altra espressione, equivalente alla precedente, ma che non dipende esplicitamente dai punti P^i_j.

Sia $x_0 \in C$ un punto fissato. Dato che $D^i_\infty - D_t + P^i_1 + \ldots + P^i_g$ è il divisore di una funzione meromorfa, dal Teorema di Abel deriva che, modulo periodi, $\sum_{j=1}^{g} \mu(x_0, P^i_j) \equiv \equiv \mu(x_0, D_t) - \mu(x_0, D^i_\infty)$, ove, se $D = \sum Q_j$, si pone $\mu(x_0, D) = \sum \mu(x_0, Q_j)$. Ancora da risultati generali sulle funzioni theta, sappiamo che, se $\varkappa$ indica la costante di Riemann e $D = \sum_{j=1}^{g} Q_j$, la funzione $\vartheta(\mu(x_0, z) + \varkappa - \mu(x_0, D))$ si annulla esattamente nei punti $Q_1, \ldots, Q_g$. Pertanto la funzione $\vartheta\left(\mu(x_0, z) + \varkappa - \sum_{j=1}^{g} \mu(x_0, P^i_j)\right)$ ha zeri nei punti P^i_j, per $j = 1, \ldots, g$. Dalla precedente congruenza segue allora che anche la funzione $\vartheta(\mu(x_0, z) + \varkappa - \mu(x_0, D_t) + \mu(x_0, D^i_\infty))$ si annulla esattamente in $P^i_1, \ldots, P^i_g$. Pertanto, ponendo

$$\tilde{f}_i(z) = \frac{\vartheta(\mu(x_0, z) + \varkappa - \mu(x_0, D_t) + \mu(x_0, D^i_\infty)) \cdot \vartheta(\mu(x_0, z) + \varkappa - \mu(x_0, D^i_\infty))}{\vartheta(\mu(x_0, z) + \varkappa - \mu(x_0, D_t))} \tag{4.5}$$

si ottiene una funzione con lo stesso divisore di f_i. Ancora dall'unicità delle f_i ne consegue che $f_i(z) = \tilde{f}_i(z)/\tilde{f}_i(\infty_i)$.

Osservazione 4.6: In quanto detto precedentemente, la scelta di un divisore D_t che rappresenta il fibrato in rette E_t è arbitraria, infatti un fibrato in rette non definisce un divisore, ma solo una classe di equivalenza lineare di divisori. Analizziamo ora come si traduce, a livello della matrice $A(x)$, la scelta di un altro divisore $D'_t \sim D_t$.

Se $D'_t - D_t = (f_t)$, ove f_t è una funzione meromorfa su C, si ha $\mathcal{L}(D'_t) = f_t^{-1} \mathcal{L}(D_t)$. Ricordiamo che la base f_i di $\mathcal{L}(D_t)$ era scelta in modo tale che f_i fosse l'unica funzione meromorfa con divisore $(f_i) \geqslant -D_t + D^i_\infty$ tale che $f_i(\infty_i) = 1$. Da ciò deriva che la corrispondente base f'_i di $\mathcal{L}(D'_t)$ è data da $f'_i(z) = f_t(\infty_i) f_t(z)^{-1} f_i(z)$.

Se poniamo $F(x_0)_{ij} = f_j(P_i)$ ed $F'(x_0)_{ij} = f'_j(P_i)$, la precedente uguaglianza si può esprimere, in termini di matrici, nella forma $F'(x_0) = F_t^{-1}(x_0) F(x_0) F_t(\infty)$, ove

$$F_t(x_0) = \begin{bmatrix} f_t(P_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f_t(P_n) \end{bmatrix} \quad \text{ed} \quad F_t(\infty) = \begin{bmatrix} f_t(\infty_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f_t(\infty_n) \end{bmatrix}.$$

La matrice $A'(x_0)$, corrispondente alla scelta del divisore D'_t, è data allora da:

$$A'(x_0) = F'(x_0)^{-1} Y(x_0) F'(x_0) = F_t^{-1}(\infty) F^{-1}(x_0) F_t(x_0) Y(x_0) F_t^{-1}(x_0) F(x_0) F_t(\infty) =$$
$$= F_t^{-1}(\infty) F^{-1}(x_0) Y(x_0) F(x_0) F_t(\infty) = F_t^{-1}(\infty) A(x_0) F_t(\infty).$$

In altre parole, la nuova matrice $A'(x_0)$ è ottenuta da $A(x_0)$ per coniugazione per una matrice del tipo $F_t(\infty)$. Si noti che l'insieme delle matrici diagonali $F_t(\infty)$ è proprio il commutatore della matrice $A(\infty) = A_d$, che si era supposta diagonale. Quest'ultimo risultato è una conferma di quanto già sapevamo dall'Osservazione 3.6.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Beauville, *Jacobiennes des courbes spectrales et systèmes hamiltoniens complètement intégrables*, preprint.

[2] B. A. Dubrovin, *Theta functions and non-linear equations*, Russian Math. Surveys, 36, 2 (1981), 11-92.

[3] P. A. Griffiths, *Linearizing flows and a cohomological interpretation of Lax equations*, Amer. J. Math., 107 (1985), 1445-1483.

[4] P. A. Griffiths, J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, John Wiley and Sons, New York, (1978).

[5] D. Mumford, *Tata Lectures on Theta - II*, Progress in Math., 43, Boston-Basel-Stuttgart-Birkhäuser (1984).

[6] D. Mumford, J. Fogarty, *Geometric Invariant Theory* (2nd edition), Ergebnisse der Math., 34, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, New York (1982).

[7] A. G. Reyman, M. A. Semenov-Tian-Shansky, *Reduction of hamiltonian systems, affine Lie algebras and Lax equations - II*, Invent. Math., 63 (1981), pp 423-432.

Direttore responsabile: Prof. A. Ballio - Autorizz. Trib di Roma n. 7269 dell'8-12-1959

«Monograf» - Va Collamarini, 5 - Bologna