



UNIVERSITA DI PADOVA
ISTITUTO DI PSICOLOGIA
REPORT 97

Luigi Burigana

Il metodo di P. Slater
per l'ordinamento
su comparazione a coppie:
formalizzazione e nuovi risultati

Giugno 1984

Luigi Burigana

IL METODO DI P. SLATER PER L'ORDINAMENTO SU COMPARAZIONE A COPPIE: FORMALIZZAZIONE E NUOVI RISULTATI

RIASSUNTO

Sono riferiti i risultati più significativi di una indagine su gli ordini di massima prossimità e sull'indice i di Slater (1961), concetti nei quali si esprime uno dei modi più conseguenti di trattare i dati di una comparazione a coppie. Lo studio ha inizio con la definizione dei due concetti, che vengono situati in un contesto teorico di tipo combinatorio e associati alla nozione matematica di torneo (sezioni 2 e 3); si procede quindi ad un'esplorazione sistematica delle loro proprietà, ragionando dapprima sulle possibili circolarità interne ad un torneo (sezione 4) e successivamente (sezione 5) sulla scomponibilità di un torneo in blocchi secondo relazioni di congruenza. Accanto a conoscenze di interesse prevalentemente teorico sono raggiunti risultati di una certa rilevanza applicativa, come quelli relativi al rapporto fra l'indice di Slater e l'indice di inconsistenza di Kendall & Babington Smith (1940), o quelli concernenti la possibilità di determinare per stadi un ordine di massima prossimità.

SUMMARY

Some results are reported of a formal inquiry into nearest adjoining orders and Slater's (1961) i index: two concepts which are at the core of one of the neatest methods to be applied to paired comparisons experiments. The study starts by defining the two concepts; they are located in a combinatorial theoretical frame and related to the mathematical notion of tournament (sections 2 and 3). Then their properties are investigated, by considering first circular structures in tournaments (section 4) and then decomposability of tournaments according to congruence relations (section 5). Besides some results of purely theoretical interest, others were obtained of practical importance: e.g., relations between Slater's i and Kendall & Babington Smith's (1940) measure of inconsistency, and a possible stepwise determination of nearest adjoining orders.

1. INTRODUZIONE

Una comparazione per coppie eseguita da un singolo soggetto non differisce, strutturalmente, da un torneo nel quale i contendenti si affrontino a due a due, per un'unica volta, in tutti gli accoppiamenti possibili (round-robin tournament); quando siano esclusi, nei singoli confronti, esiti di parità, il risultato complessivo potrà essere descritto, in entrambi i casi, con un digrafo (grafo diretto) su tanti nodi quanti sono gli oggetti della comparazione o i partecipanti al torneo, e con un arco per ogni due nodi, orientato dal vincente verso il perdente; in letteratura codeste strutture grafiche prendono, esse stesse, il nome di tornei.

In una comparazione per coppie gli oggetti sono posti a confronto relativamente ad un comune attributo che, concettualmente e nell'espressione linguistica, è di tipo ordinale (ad esempio: essere più pesante di, più trasparente di, più progressista di, ecc.); concordemente, scopo primario dell'esperimento sarà la determinazione di un ordine fra gli oggetti, la loro disposizione in una graduatoria completa e senza pari merito. L'ordine cercato, tuttavia, non può in genere essere letto direttamente dai risultati, non offrendo la procedura sperimentale per sé stessa alcuna assicurazione sulla transitività dei giudizi; un ordine dovrà quindi essere adattato o approssimato ai risultati, riassunti in un torneo, procedendo alla ricerca di uno fra i diversi ordini teoricamente ammissibili che sia quanto possibile vicino al torneo sperimentalmente realizzato.

Ma come valutare la distanza fra un ordine e un torneo? Se riconosciamo che gli ordini sono essi stessi dei tornei, equivalendo ai tornei transitivi, ammetteremo che quella distanza potrà consistere nel numero di archi corrispondenti orientati in senso opposto nelle due strutture. Dobbiamo l'enunciazione e una prima trattazione sistematica di questo criterio a Slater (1961); un criterio del quale per altro erano apparsi consapevoli anche altri studiosi, quali Guttman (1946), Kendall (1955), Brunk (1960); gli ordini che relativamente ad un assegnato torneo minimizzano quel tipo di distanza prenderanno il nome di ordini di massima prossimità (nearest adjoining orders, nella locuzione di Slater), e la distanza minima da essi realizzata costituisce l'indice slateriano del torneo in discussione.

A quanto mi risulta sono ancora scarse le conoscenze acquisite intorno agli ordini di massima prossimità e all'indice slateriano; l'unico argomento ad aver alimentato un complesso di ricerche di una certa consistenza sembra essere quello, importante per la pratica, della costruzione di buoni algoritmi per l'effettiva determinazione di quegli ordini e di quell'indice (Slater (1961),

Remage & Thompson (1966), Phillips (1967, 1969, 1976), De Cani (1969, 1972), Smith & Payne (1976), Ranyard (1976), Bezembinder (1981)); per contro, largamente inesplorate appaiono le opportunità di indagine che, sui concetti in discussione, si possono reperire all'interno della Teoria dei Tornei e, più in generale, dell'Analisi Combinatoria. E' su questo fronte che la presente mia ricerca si propone di operare; nell'intento di pervenire a dei risultati che meglio chiariscano la natura di quei concetti e possibilmente facilitino il loro impiego nelle applicazioni psicometriche.

2. DIFFERENZE E DISTANZE FRA TORNEI

Insiemeisticamente un *torneo* x fra k termini consiste in un sistema (K, A_x) formato da un dominio $K = \{1, \dots, k\}$ e da una collezione A_x di $n = k(k-1)/2$ coppie ordinate di elementi in K , contenente per arbitrari distinti $i, j \in K$ una ed una soltanto delle coppie (i, j) , (j, i) ; anziché scrivere $(i, j) \in A_x$ porremo sovente, con maggiore efficacia, $i \rightarrow j$, e diremo che il termine i domina il termine j entro il torneo x ; codesta *dominanza* si configura, evidentemente, quale relazione irreflessiva, antisimmetrica e completa sul dominio K (cfr. Moon (1968), topic 1). Ad un torneo possiamo anche conferire espressione grafica, rappresentando gli elementi del dominio quali punti o *nodi* su un piano, e ciascuna coppia della relazione di dominanza quale linea o *arco* tra i due termini che la compongono, orientato dal primo verso il secondo; il seguente, ad esempio, è il diagramma di un possibile torneo fra $k = 5$ termini.

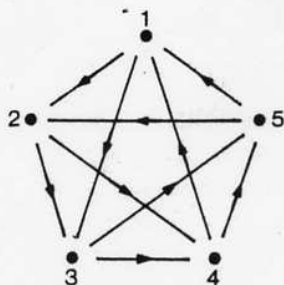


FIGURA 1. Torneo fra 5 termini.

Ogni linea tra due nodi può assumere, indipendentemente, una qualsiasi di due opposte direzioni, e pertanto su uno stesso insieme di k termini si possono definire 2^n differenti tornei, che supporremo costituire una totalità X ; chiameremo *ordine nominale*, e indicheremo con la lettera ϵ , il torneo entro il quale tra due qualsiasi termini sia dominante quello che nella sequenza dei numeri viene per primo, sicché $A_\epsilon = \{(i, j) : 1 \leq i < j \leq k\}$; qualifichere-

mo inoltre come *complemento* di un dato torneo x , e designeremo con la notazione $\bar{x}$, il torneo deducibile da x per capovolgimento completo dei suoi archi, nel quale quindi $A_{\bar{x}} = \{(i,j) : (j,i) \in A_x\}$.

Vogliamo anche considerare l'insieme $N = \{(i,j) : 1 \leq i \neq j \leq k\}$ delle n coppie non ordinate di elementi in K ; possiamo intendere ciascuna di tali coppie quale arco non orientato tra i due termini componenti, e il sistema (K,N) come il grafo (non diretto) completo sul dominio K . Questo grafo si tramuta in un torneo x quando venga stabilito un verso $v_x(\{i,j\})$ per ogni arco $\{i,j\} \in N$; nell'esprimere i versi potremmo seguire la regola

$$\begin{aligned} v_x(\{i,j\}) &= 1 \quad \text{se} \quad \min(i,j) \overset{x}{\succ} \max(i,j) \\ &= 0 \quad \text{se} \quad \max(i,j) \overset{x}{\succ} \min(i,j), \end{aligned}$$

porre cioè $v_x(\{i,j\}) = 1$ oppure 0 a seconda che l'arco $\{i,j\}$ sia o rientato dal più piccolo al più grande o, al contrario, dal più grande al più piccolo dei due numeri designanti le sue estremità; definire un torneo x equivarrà pertanto a specificare su N la relativa funzione versi v_x o, indifferentemente, l'insieme $N_x = \{(i,j) \in N : \min(i,j) \overset{x}{\succ} \max(i,j)\}$ di cui tale funzione è l'indicatore. Alla totalità X dei tornei su K farà riscontro l'insieme $\{0,1\}^N$ delle funzioni da N in $\{0,1\}$; in particolare, all'ordine nominale ϵ corrisponderà la funzione v_ϵ di valore 1 sull'intero N , sicché $N_\epsilon = N$, e per il complemento $\bar{x}$ di un qualsiasi torneo x avremo $v_{\bar{x}} = |1 - v_x|$ e $N_{\bar{x}} = N - N_x$.

Siano ora dati x e y arbitrari tornei sullo stesso dominio K . Riterremo un arco $a \in N$ *concorde* oppure *discorde* tra x e y a seconda che il suo orientamento coincida o differisca nei due tornei; l'insieme degli archi discordi, indicato con $D(x,y)$, costituisce la *differenza* tra x e y ; in formula

$$\begin{aligned} D(x,y) &= \{a \in N : v_x(a) \neq v_y(a)\} \\ &= N_x \Delta N_y \quad . \end{aligned}$$

Ad ogni coppia di tornei corrisponde dunque una differenza, consistente in un insieme di archi incluso in N , e per la quale valgono evidentemente le seguenti proprietà

$$\begin{aligned} D(\epsilon, x) &= N_x \quad , \quad D(x,y) = D(y,x) \quad , \quad D(x,\bar{y}) = N - D(x,y) & (1) \\ D(x,y) &= \emptyset \quad \text{sse} \quad x = y \quad , \quad D(x,y) = N \quad \text{sse} \quad x = \bar{y} \\ D(x,z) &= D(x,y) \Delta D(y,z) \quad . \end{aligned}$$

Il numero degli archi discordi sarà detto *distanza* fra x e y , e verrà designato con la notazione $d(x,y)$, sicché

$$d(x,y) = |D(x,y)| = |N_x \Delta N_y| \quad ; \quad (2)$$

dalla (1) segue direttamente che $d(x,y) = d(y,x)$, $d(x,y) = 0$ sse $x=y$, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$, donde rileviamo che l'indice d , inteso quale funzione su $X \times X$, costituisce una metrica sullo spazio X dei tornei, i cui possibili valori sono gli interi da 0 a n . Fissato un ordine fra gli archi in N le funzioni versi realizzeranno le possibili n -ple di cifre 1 e 0, e lo spazio X dei tornei equivarrà al grafo n -cubo (cfr. Harary (1969), p. 23) entro il quale risultano fra loro adiacenti tornei che differiscano per l'orientamento di un singolo arco, sicché

$$x \text{ adj } y \text{ sse } d(x,y) = 1 \quad ; \quad (3)$$

riferita a codesto grafo la distanza $d(x,y)$ tra due generici tornei è la minima lunghezza dei percorsi tra i nodi x e y .

Procedendo per simmetria supponiamo ora dati un torneo x ed un insieme di archi $D \subseteq N$. Se invertiamo entro x l'orientamento dei soli archi in D realizzeremo, evidentemente, un nuovo torneo, per il quale proponiamo la notazione $x \setminus D$ e che chiameremo torneo *trasformato* da x per *inversione* degli archi in D ; avremo naturalmente

$$v_{x \setminus D} = |v_x - I_D| \quad \text{e} \quad N_{x \setminus D} = N_x \Delta D$$

ove I_D sia l'indicatore dell'insieme D in N . Si riconosce direttamente che

$$x \setminus D = y \quad \text{sse} \quad D = D(x,y) \quad ,$$

sicché $x \setminus D = x$ sse $D = \emptyset$, $x \setminus D = \bar{x}$ sse $D = N$ e, in generale, $d(x, x \setminus D) = |D|$; inoltre per arbitrari $D, E \subseteq N$ risulta $N(x \setminus D) \setminus E = N_x \setminus D \Delta E = N_x \Delta D \Delta E = N_x \setminus (D \Delta E)$, e quindi

$$(x \setminus D) \setminus E = x \setminus (D \Delta E)$$

donde in particolare

$$(x \setminus D) \setminus D = x \quad , \quad (x \setminus D) \setminus E = (x \setminus E) \setminus D \quad (4)$$

$$D \cap E = \emptyset \text{ implica } (x \setminus D) \setminus E = x \setminus (D \cup E)$$

$$x \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_p\} = (\dots(x \setminus a_1) \setminus a_2 \dots) \setminus a_p$$

ove per $a \in N$ semplifichiamo $x \setminus \{a\}$ in $x \setminus a$; infine $\overline{x \setminus D} = (x \setminus D) \setminus N = x \setminus (D \Delta N) = x \setminus D^C = x \setminus (N \Delta D) = (x \setminus N) \setminus D = \bar{x} \setminus D$, o in breve

$$\overline{x \setminus D} = x \setminus D^C = \bar{x} \setminus D$$

designando D^C il complemento di D entro N .

3. DIFFERENZE E DISTANZE FRA ORDINI E TORNEI

Un torneo ξ sul dominio K è ritenuto *transitivo* se

$$i \xrightarrow{\xi} j \text{ e } j \xrightarrow{\xi} l \text{ implica } i \xrightarrow{\xi} l \quad (5)$$

per arbitrari i, j, l in K (cfr. Moon (1968), topic 7); la relazione costituente un simile torneo, antisimmetrica e completa fra termini distinti ed ora pure transitiva, differisce da un ordine totale soltanto perché irreflessiva, aspetto trascurabile nel presente contesto; l'insieme dei tornei transitivi, per il quale stabiliamo il simbolo Ξ , equivale dunque nella sostanza alla famiglia degli ordini totali su K , che qui chiameremo semplicemente *ordini*, e nel descrivere tornei transitivi potremo seguire uno qualsiasi dei criteri solitamente adottati per gli ordini. Un torneo transitivo ξ potrà, ad esempio, essere espresso quale funzione posti $\rightarrow$ termini da K su K , identificando per $i = 1, \dots, k$ con $\xi(i)$ l'unico termine in K dominato da $i-1$ altri elementi di K ; oppure quale funzione termini $\rightarrow$ posti, identica all'inversa ξ^{-1} della precedente, e che ad ogni termine i in K fa corrispondere un valore $\xi^{-1}(i)$ pari al numero degli elementi in K dominanti i aumentato di una unità; o anche come k -pla $(\xi(1), \dots, \xi(k))$ nella quale, come in una normale graduatoria, i termini si susseguano secondo il numero decrescente delle "vittorie" riportate. Intendendo poi conferire espressione grafica ad un torneo transitivo ξ , anziché costruire un grafo diretto del tipo illustrato in figura 1, potremmo registrare i termini $\xi(1), \dots, \xi(k)$ quali punti allineati in tale ordine da sinistra verso destra, e tracciare un arco tra ogni due punti, che potrà rimanere non diretto essendo sottinteso il comune orientamento verso destra; per $\xi = (2, 5, 4, 1, 3)$ otterremo, ad esempio, il seguente diagramma lineare.

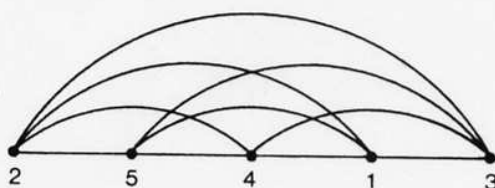


FIGURA 2. Diagramma lineare di un torneo transitivo.

Importa anche rilevare che con riferimento ad un torneo transitivo ξ ogni arco $\{i, j\}$ in N assume un'ampiezza $|\xi^{-1}(i) - \xi^{-1}(j)|$, e tra gli archi in N viene a stabilirsi una relazione (ordine parziale) di *ricoprimento*, ove si ritenga $\{i, j\}$ coperto da $\{h, l\}$ qualora $\min(\xi^{-1}(i), \xi^{-1}(j)) \geq \min(\xi^{-1}(h), \xi^{-1}(l))$ e $\max(\xi^{-1}(i), \xi^{-1}(j)) \leq \max(\xi^{-1}(h), \xi^{-1}(l))$; di seguito è rappresentato l'ordine degli archi per il torneo transitivo di figura 2 e sono indicate le corrispondenti ampiezze.

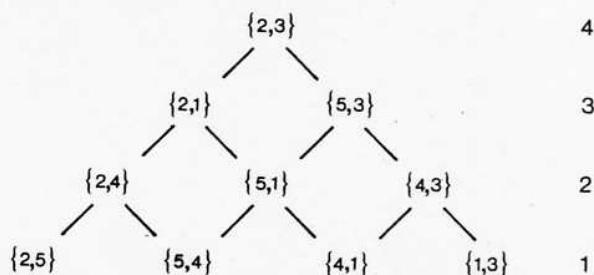


FIGURA 3. Ricoprimento tra archi e loro ampiezze in un torneo transitivo.

L'insieme Ξ può essere studiato sia in un contesto algebrico che nell'ottica dei grafi. Algebricamente lo spazio Ξ dei tornei transitivi, espressi quali funzioni posti $\rightarrow$ termini, equivale al gruppo simmetrico sul dominio K , il che consente di considerare, per ogni ξ in Ξ e per qualsiasi permutazione g su K , le composizioni $\xi \circ g$ e $g \circ \xi$; nella prima trasformazione g va intesa quale permutazione sull'insieme dei posti, e $\xi \circ g$ è l'ordine che otteniamo da ξ scambiando di posto secondo g i termini dati; nella seconda interpreteremo g quale permutazione sull'insieme dei termini, e $g \circ \xi$ come l'ordine derivabile da ξ per sostituzione di termine a termine secondo g nei posti assegnati. In particolare, per una *trasposizione* (h, l) , nella quale $(h, l)(i) = l, h, i$ a seconda che $i = h$, $i = l$, $i \neq h, l$, avremo che $\xi \circ (h, l)$ è l'ordine trasformato da ξ per semplice scambio di posto fra i termini $\xi(h)$ e $\xi(l)$; per una *traslazione destra* $[h, l]$, nella quale $h \leq l$ e $[h, l](i) = l, i-1, i$ a seconda che $i = h$, $h < i \leq l$, $i < h$ oppure $i > l$, la composizione $\xi \circ [h, l]$ definirà l'ordine che si ottiene da ξ collocando il termine $\xi(h)$ al posto l , facendo regredire di un passo ciascuno i termini $\xi(h+1), \dots, \xi(l)$ e conservando al loro posto i rimanenti; simmetrica l'interpretazione di $\xi \circ [h, l]$ per $[h, l]$ *traslazione sinistra*, nella quale $h \geq l$ e $[h, l](i) = l, i+1, i$ a seconda che $i = h$, $l \leq i < h$, $i < l$ oppure $i > h$; infine, se $c(i) = k-i+1$ per $i = 1, \dots, k$, la composizione $\xi \circ c$ definirà il complemento $\bar{\xi}$ del torneo ξ , ossia il capovolto dell'ordine da

to. Osserviamo pure che per arbitrari ξ, η in Ξ

$$\begin{aligned} d(\xi, \eta) &= |\{ \{i, j\} \in N : (\xi^{-1}(i) < \xi^{-1}(j) \text{ e } \eta^{-1}(i) > \eta^{-1}(j)) \text{ oppure } (\xi^{-1}(i) > \xi^{-1}(j) \text{ e } \eta^{-1}(i) < \eta^{-1}(j)) \}| \\ &= |\{ \{i, j\} : 1 \leq i < j \leq k, \xi^{-1} \circ \eta(i) > \xi^{-1} \circ \eta(j) \}| \\ &= i(\xi^{-1} \circ \eta); \end{aligned} \quad (6)$$

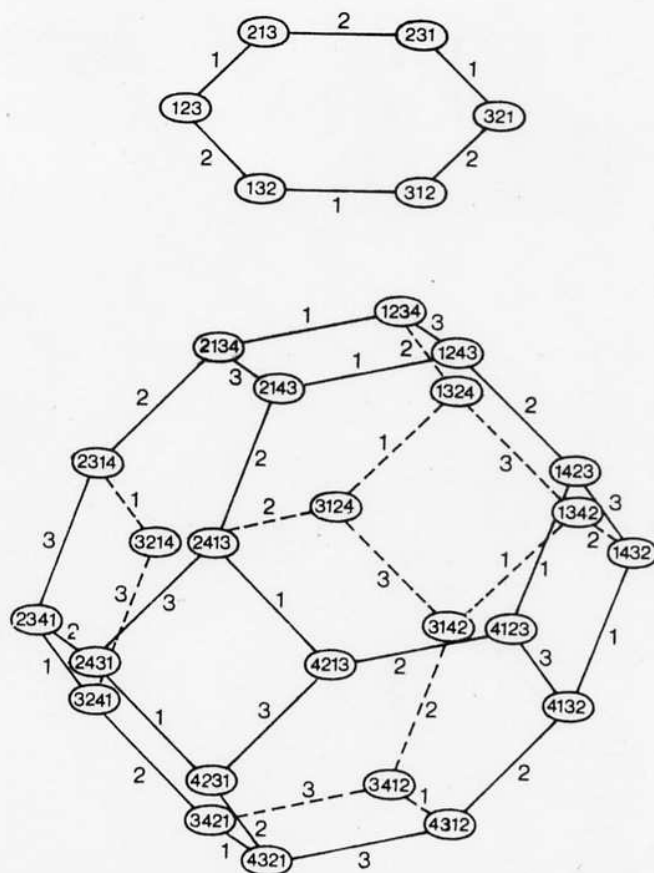
in altri termini, la distanza $d(\xi, \eta)$ fra due tornei transitivi, definita in generale dalla (2), coincide con il numero $i(\xi^{-1} \circ \eta)$ delle inversioni nella permutazione $\xi^{-1} \circ \eta$.

Per altro verso, se riferiamo a Ξ la relazione di adiacenza fra tornei definita in generale dalla (3), otterremo un grafo, precisamente il sottografo generato entro l' n -cubo X dall'insieme Ξ ; si riconosce immediatamente che fra due tornei transitivi la detta adiacenza equivale all'esistenza di una *trasposizione standard* che ne funga da tramite, si constata cioè che per ξ, η in Ξ

$$\xi \text{ adj } \eta \quad \text{sse} \quad \eta = \xi \circ (i, i+1) \quad (7)$$

per qualche $i = 1, \dots, k-1$;

nella seguente figura sono rappresentati i grafi sugli insiemi dei



3-D permutahedron
→ Goodman O'Rourke 97.252

tornei transitivi per $k = 3, 4$, risultando ciascun arco siglato con il termine i della trasposizione standard $(i, i+1)$ che ne connette le estremità. E' risaputo (si veda, ad esempio, Aigner (1979) proposition 1.8) che da una permutazione ξ possiamo passare ad una permutazione η tramite una sequenza di tante trasposizioni standard quante sono le inversioni in $\xi^{-1} \circ \eta$; questo risultato e le proprietà formulate in (6) e (7) fanno riconoscere che non solo entro l' n -cubo X ma anche entro il suo sottografo Ξ la distanza $d(\xi, \eta)$ tra due tornei transitivi corrisponde alla lunghezza minima dei percorsi tra i nodi ξ ed η . Ora, dato un generico torneo x , supponiamo di raffrontare ad esso un qualche torneo transitivo ξ . Riterremo la differenza $D = D(x, \xi)$ un *risolutore* e l'operazione $x \setminus D$ una *rettifica* per il torneo x , volendo rilevare con tali espressioni come l'inversione entro x degli archi in D realizzi l'ordine ξ , una delle possibili approssimazioni transitive al torneo dato; l'inadeguatezza di tale approssimazione sarà ovviamente misurata dalla distanza $d(x, \xi) = |D|$ fra i due tornei. Esiste un modo elementare di esprimere in un unico grafico il torneo x , l'ordine ξ e il risolutore D , e consiste nel segnare con tratti diversi entro il diagramma lineare di ξ gli archi appartenenti e quelli non appartenenti al risolutore; il grafico che ne risulta, di seguito illustrato relativamente alle strutture di figura 1 e 2, costituisce la *rappresentazione* del torneo x secondo l'ordine ξ .

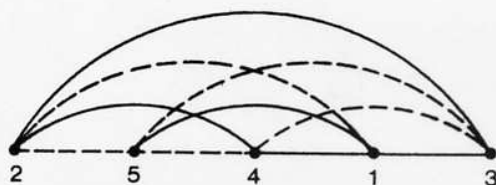


FIGURA 4. Rappresentazione di un torneo secondo un ordine. Gli archi discordi sono tratteggiati e vanno intesi orientati entro il torneo da destra verso sinistra.

Si noti che in un risolutore ogni arco possiede un'ampiezza, e che sul risolutore viene a stabilirsi un ordine parziale secondo il ricoprimento fra archi.

Assegnato un generico torneo x , ciascuno dei $k!$ ordini su K si disporrà ad una certa distanza da esso, espressa da un intero fra 0 e n ; indicato per $p = 0, 1, \dots, n$ con $\Xi(x, p)$ l'insieme degli ordini collocati a distanza p dal torneo x , posto cioè

$$\Xi(x, p) = \{\xi \in \Xi : d(x, \xi) = p\}$$

possiamo considerare la sequenza

$$\Xi(x, \cdot) = (\Xi(x, 0), \Xi(x, 1), \dots, \Xi(x, n))$$

che chiameremo *stratificazione* di Ξ indotta da x ; si tratta, evidentemente, di una partizione ordinata dello spazio Ξ dei tornei transitivi in $n+1$ insiemi non necessariamente non vuoti, che di seguito viene illustrata per un torneo su $k = 4$ termini.

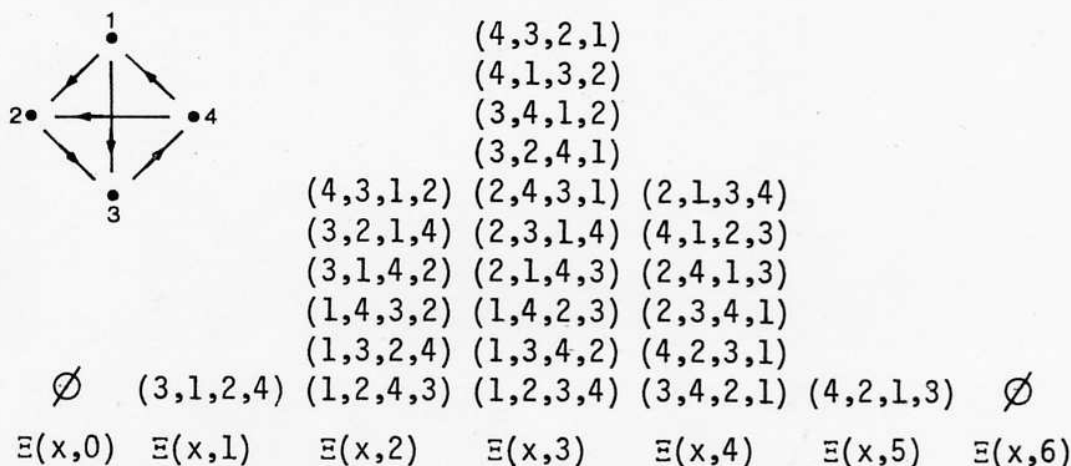


FIGURA 5. Una stratificazione dello spazio degli ordini fra $k = 4$ elementi.

Prima di segnalare alcune semplici caratteristiche di codesta stratificazione facciamo osservare che per ogni $\xi \in \Xi$ e qualsiasi $i = 1, \dots, k-1$

$$d(x, \xi \circ (i, i+1)) = d(x, \xi) \pm 1; \quad (8)$$

infatti una trasposizione standard $(i, i+1)$ comporta l'inversione entro ξ del solo arco $\{\xi(i), \xi(i+1)\}$, sicché $D(x, \xi \circ (i, i+1)) = D(x, \xi) \Delta \{\{\xi(i), \xi(i+1)\}\}$, e pertanto $d(x, \xi \circ (i, i+1)) - d(x, \xi) = -1, 1$ a seconda che tale arco appartenga o non appartenga al risolutore $D(x, \xi)$.

1. Proposizione: Siano x un generico torneo e $\Xi(x, \cdot)$ la stratificazione da esso indotta su Ξ .

(i) Un ordine giace a distanza p da x se e soltanto se il medesimo si trova a distanza $n-p$ dal torneo complementare $\bar{x}$, ossia $\Xi(x, p) = \Xi(\bar{x}, n-p)$ per $p = 0, 1, \dots, n$.

(ii) Gli ordini situati a distanza $n-p$ da x sono i complementi degli ordini posti a distanza p dal medesimo x , ossia $\Xi(x, n-p) =$

$\{\bar{\xi} : \xi \in \Xi(x, p)\}$ per $p = 0, 1, \dots, n$; la sequenza $(|\Xi(x, p)| : p = 0, 1, \dots, n)$ delle cardinalità degli strati risulta dunque simmetrica.

(iii) Detti $\underline{p}$ e $\bar{p}$ gli indici del primo e dell'ultimo degli strati non vuoti avremo $\Xi(x, p) \neq \emptyset$ per ogni $\underline{p} \leq p \leq \bar{p}$; la sequenza delle cardinalità degli strati si compone cioè di un corpo centrale ovunque positivo e di eventuali segmenti terminali nulli.

dimostrazione Riconosciamo valide le prime due parti notando semplicemente che, per la terza equazione in (1), $d(\bar{x}, \xi) = n - d(x, \xi) = d(x, \bar{\xi})$ in corrispondenza ad ogni $\xi \in \Xi$. Per la verifica della terza parte si considerino un arbitrario ξ nel $\underline{p}$ -esimo strato e il relativo complemento $\bar{\xi} = \xi \circ c$ il quale, secondo la (ii), apparterrà allo strato $\bar{p}$ -esimo; espressa la permutazione c quale composizione $t_1 \circ t_2 \circ \dots \circ t_n$ di n trasposizioni standard (cfr. Aigner (1979), proposition 1.8) e posto induttivamente $\eta_0 = \xi$, $\eta_s = \eta_{s-1} \circ t_s$ per $s = 1, \dots, n$, sicché $\eta_n = \bar{\xi}$, in base alla (8) la sequenza $(\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n)$ realizzerà una "passeggiata" con inizio nel primo e termine nell'ultimo degli strati non vuoti; ogni strato intermedio conterrà dunque qualche termine della sequenza, e non potrà quindi essere vuoto. Q.E.D.

L'indice del primo strato non vuoto rappresenta, naturalmente, la minima distanza dei termini in Ξ da x , ed esprime quindi l'incongruenza residua nell'approssimazione ottimale di un ordine al dato torneo; tale indice, che per fedeltà alla simbologia di Slater designeremo con $i(x)$, sarà detto *indice slateriano* del torneo x ; avremo dunque formalmente

$$i(x) = \min_{\xi \in \Xi} d(x, \xi) = \min \{p : \Xi(x, p) \neq \emptyset\}.$$

Gli ordini situati a distanza $i(x)$ da x costituiscono altrettante approssimazioni transitive ottimali al dato torneo; saranno chiamati *ordini di massima prossimità* (m.p.) ("nearest adjoining orders" è la locuzione di Slater) per x , e con $S(x)$ verrà indicata la loro collezione, ovviamente identica allo strato $\Xi(x, i(x))$; entro la famiglia $\{D(x, \xi) : \xi \in \Xi\}$ dei $k!$ possibili risolutori per x agli ordini m.p. verranno evidentemente a corrispondere i *risolutori di minima cardinalità* (m.c.).

Come anticipato nell'Introduzione quelli appena definiti sono i concetti centrali della presente ricerca, e su di essi verteranno per gran parte le riflessioni nelle successive due sezioni; fin d'ora comunque si possono rendere evidenti significative loro proprietà, alcune delle quali risultano (almeno implicitamente) già acquisite dalla letteratura. Giova ricordare, prima di passare al prossimo enunciato, che dati un torneo x , un ordine $\xi = (\xi(1), \dots, \xi(k))$ ed un sottoinsieme H del dominio K , per *sottotorneo generato* in x da H , indicato con la scrittura $x|H$, si intende il torneo con dominio H

e con dominanza la restrizione ad H della dominanza in x , e che H è ritenuto costituire un *intervallo* in ξ se $H = \{\xi(i) : j \leq i \leq l\}$ per determinati $j \leq l$ fra 1 e k .

2. Proposizione: Sia x un generico torneo sul dominio K .

(i) Gli ordini m.p. (di massima prossimità) per il torneo complementare $\bar{x}$ sono i complementi degli ordini m.p. per x , e i due tornei posseggono identico indice slateriano; sussistono cioè le uguaglianze $S(\bar{x}) = \{\bar{\xi} : \xi \in S(x)\}$ e $i(\bar{x}) = i(x)$.

(ii) Se ξ è ordine m.p. per x e se $H \subseteq K$ costituisce un intervallo in ξ , allora pure $\xi|_H$ è ordine m.p. per $x|_H$.

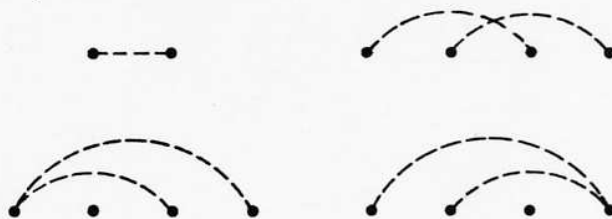
(iii) Se $D \subseteq N$ è risolutore non m.c. (non di minima cardinalità) per x allora per ogni $a \in N-D$ anche $D \cup \{a\}$ è risolutore non m.c. per $x \setminus a$.

(iv) Se $D \subseteq N$ è risolutore m.c. per x allora per ogni $a \in D$ anche $D - \{a\}$ è risolutore m.c. per $x \setminus a$.

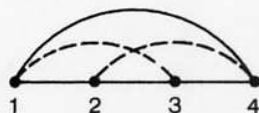
dimostrazione (i) Discende direttamente dalle prime due parti della proposizione 1. (ii) Entro la differenza D fra x e ξ , che sotto le dette ipotesi costituirà un risolutore m.c. per x , determiniamo il sottoinsieme D' degli archi con entrambi gli estremi in H , per il quale ovviamente $\xi|_H = (x|_H) \setminus D'$. Se l'ordine ristretto $\xi|_H$ non fosse m.p. per il sottotorneo $x|_H$ esisterebbe per codesto sottotorneo un risolutore E' con $|E'| < |D'|$ ed $E' \cap (D-D') = \emptyset$; in tal caso $E = (D-D') \cup E'$ costituirebbe un risolutore per x con $|E| = |D| - |D'| + |E'| < |D|$ e, contro l'ipotesi, il risolutore D per x non sarebbe m.c.. (iii) Posto $\xi = x \setminus D$, nelle indicate circostanze avremo, in forza della (4), $(x \setminus a) \setminus (D \cup \{a\}) = ((x \setminus a) \setminus a) \setminus D = x \setminus D = \xi$, sicché $D \cup \{a\}$ costituisce sicuramente un risolutore per $x \setminus a$. Il risolutore D per x è assunto non m.c., e possiamo quindi trovare un risolutore E per il medesimo x con $|E| < |D|$; sia $\eta = x \setminus E$. Se $a \in E$ allora $(x \setminus a) \setminus (E - \{a\}) = x \setminus ((E - \{a\}) \cup \{a\}) = x \setminus E = \eta$, sicché $E - \{a\}$ è risolutore per $x \setminus a$ con $|E - \{a\}| = |E| - 1 < |D| + 1 = |D \cup \{a\}|$; e se, al contrario, $a \notin E$ allora $(x \setminus a) \setminus (E \cup \{a\}) = ((x \setminus a) \setminus a) \setminus E = x \setminus E = \eta$, e quindi $E \cup \{a\}$ è risolutore per $x \setminus a$ con $|E \cup \{a\}| = |E| + 1 < |D \cup \{a\}|$; esiste quindi comunque un risolutore per $x \setminus a$ più piccolo di $D \cup \{a\}$, a riprova che questo ultimo non è m.c.. (iv) Posto nuovamente $\xi = x \setminus D$, sotto le ipotesi della quarta parte sarà $(x \setminus a) \setminus (D - \{a\}) = x \setminus ((D - \{a\}) \cup \{a\}) = x \setminus D = \xi$, e $D - \{a\}$ costituisce quindi un risolutore per $x \setminus a$; se questo risolutore non fosse m.c. allora, per la terza parte appena verificata, anche $(D - \{a\}) \cup \{a\} = D$ sarebbe risolutore non m.c. per $(x \setminus a) \setminus a = x$, in diretto contrasto con le premesse. Q. E.D.

Ragionando localmente, come consente la seconda parte della precedente proposizione, possiamo stabilire varie condizioni necessarie per gli ordini m.p., espresse quali figure impossibili entro i diagrammi di archi a duplice tratto.

3. Proposizione: *Nella rappresentazione di un torneo secondo un proprio ordine m.p. non possono darsi intervalli nei quali alcuni degli archi discordi si dispongano in una delle seguenti maniere.*



dimostrazione Per le parti (ii) e (iii) della proposizione 2 è sufficiente verificare che, ritenendo concordi tutti gli archi non tracciati, ogni schema si completa nella rappresentazione con giunta di un torneo x e di un ordine ξ che non è per esso m.p.; possiamo supporre, senza perdere in generalità, che i nodi siano siglati da sinistra verso destra secondo l'ordine nominale. Ora, il primo schema è già completo, e descrive il torneo transitivo $x = (2,1)$ e l'ordine $\xi = (1,2)$ che, palesemente, non risulta m.p. per x . Il secondo schema si completa nel diagramma



considerato l'ordine $\eta = (3,1,4,2)$, che si può derivare da $\xi = (1,2,3,4)$ capovolgendo dapprima l'arco $\{2,3\}$ e successivamente $\{1,3\}$ e $\{2,4\}$, osserviamo che $d(x,\eta) = 1 < 2 = d(x,\xi)$, sicché ξ non è m.p. per x . Analoga la verifica per i restanti schemi. Q.E.D.

Si osservi che, per la riconosciuta impossibilità della prima figura, in un ordine m.p. tutti gli archi di ampiezza 1 risultano concordi, conservano cioè gli orientamenti valevoli nel torneo, e costituiscono perciò entro il torneo un percorso hamiltoniano (cfr. Remage & Thompson (1966), theorem 1); potremmo quindi pensare di dar corso all'individuazione degli ordini m.p. cercando in primo luogo di determinare tutti i percorsi hamiltoniani entro il dato torneo.

Una traslazione destra o sinistra $[h,1]$, quale è stata definita nel secondo paragrafo della presente sezione, applicata da destra ad un ordine ξ comporta il capovolgimento di un insieme $F(h,1;\xi)$ di $|h-1|$ archi, ove $F(h,1;\xi) = \{\{\xi(h),\xi(i)\} : h < i \leq$

1} se $h < 1$ (traslazione destra), mentre $F(h,1;\xi) = \{\{\xi(h), \xi(i)\} : 1 \leq i < h\}$ se $h > 1$ (traslazione sinistra). Dato un torneo x , una traslazione $[h,1]$ sia ritenuta *bilanciata* per un ordine ξ se gli archi da essa capovolti in ξ sono per metà discordi e per metà concordi rispetto a x , quando cioè $|F(h,1;\xi) \cap D(x,\xi)| = |F(h,1;\xi) - D(x,\xi)|$; siccome $D(x,\xi \circ [h,1]) = D(x,\xi) \Delta F(h,1;\xi)$, una traslazione bilanciata non altera la distanza da x dell'ordine cui viene applicata e quindi, in particolare, se l'ordine ξ è m.p. per x anche l'ordine traslato $\xi \circ [h,1]$ sarà m.p. per x ; in altri termini, la classe $S(x)$ risulta chiusa alle traslazioni bilanciate di propri membri. Conveniamo ora di ritenere due qualsiasi ordini ξ, η in $S(x)$ fra loro *adiacenti per traslazione* se esiste $[h,1]$ traslazione bilanciata per ξ tale che $\eta = \xi \circ [h,1]$; codesta relazione, ovviamente simmetrica in quanto $[h,1]^{-1} = [1,h]$, struttura l'insieme degli ordini m.p. quale grafo: in esso due ordini ξ, η risulteranno fra loro connessi quando l'uno possa essere derivato dall'altro tramite una sequenza di traslazioni bilanciate, quando esistano cioè delle traslazioni $t_1, \dots, t_m$ tali che t_p è bilanciata rispetto a $\xi \circ t_1 \circ \dots \circ t_{p-1}$ per $p = 1, \dots, m$ (con $\xi \circ t_0 = \xi$) e $\xi \circ t_1 \circ \dots \circ t_m = \eta$. E' dato di seguito il grafo degli ordini m.p. per il torneo di figura 1, un grafo evidentemente connesso;

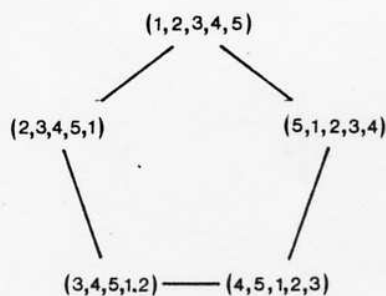
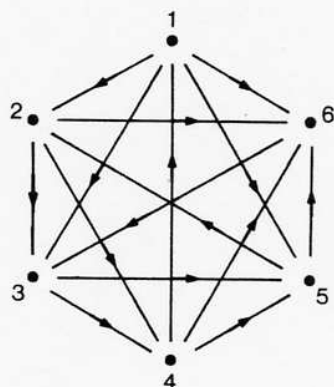


FIGURA 6. Grafo per traslazione degli ordini m.p. associati al torneo di figura 1. Ciascun arco corrisponde in senso orario alla traslazione sinistra $[5,1]$ e in senso antiorario alla traslazione destra $[1,5]$.

in casi del genere è sufficiente conoscere un singolo ordine m.p. per determinare l'intera classe $S(x)$, potendo gli altri ordini essere derivati da quello mediante ripetute traslazioni bilanciate. Questa circostanza non vale comunque in generale; lo testimonia, ad esempio, il seguente torneo, per il quale esistono due soli ordini m.p., precisamente $(1,2,3,4,5,6)$ e $(4,1,5,2,6,3)$, non vincolati da traslazione bilanciata.



Ritornando all'indice di Slater vengano designati, per k intero positivo, con $\underline{i}_k$ il più piccolo e con $\bar{i}_k$ il più grande dei valori assunti da tale indice in tornei fra k termini, e per $\underline{i}_k \leq p \leq \bar{i}_k$ sia $f_k(p)$ il numero di questi tornei con indice slateriano p . Ovviamente $\underline{i}_k = 0$, confine raggiunto dai tornei transitivi, e per la proposizione 1.ii certamente $\bar{i}_k \leq n/2 = k(k-1)/4$; non si conoscono formule che esprimano direttamente $\bar{i}_k$ in funzione di k ; sappiamo però, in base ad un risultato di Erdős & Moon (1965), che $\bar{i}_k \leq k(k-2)/4$ oppure $\leq (k-1)^2/4$ a seconda che k sia pari oppure dispari, e che fissato $\delta > 0$ piccolo a piacere risulta $\bar{i}_k \geq (1-\delta)k(k-1)/4$ per k sufficientemente grande. Scarse sono pure le conoscenze generali sulla funzione $f_k(p)$, della quale Slater (1961) presenta formule di calcolo soltanto per $p = 0(1)3$ (§ 3) e tabula i valori relativamente a $k = 2(1)8$ (table 1); si osserva comunque che sicuramente $f_k(p) > 0$ per ogni $0 \leq p \leq \bar{i}_k$; infatti, considerati un generico torneo x con $i(x) = \bar{i}_k$ e un associato risolutore $D = \{a_1, \dots, a_{\bar{i}_k}\}$ di minima cardinalità, ponendo induttivamente $y_{\bar{i}_k} = x$ e $y_p = y_{p+1} \setminus a_{p+1}$ per $p = \bar{i}_k - 1, \dots, 1, 0$ avremo, secondo la proposizione 2.iv, $i(y_p) = p$ per $p = 0, 1, \dots, \bar{i}_k$.

4. RETTIFICA DI UN TORNEO E SUOI CICLI

Un *ciclo* in un torneo è un percorso che, seguendo l'orientamento degli archi, passi per alcuni dei nodi, una singola volta per ciascuno, chiudendosi alla fine su sè stesso; un ciclo C può essere descritto o con la sequenza $C = (i_1, i_2, \dots, i_m, i_1)$ dei distinti nodi da esso toccati, ove i_1 , designato ad arbitrio come nodo iniziale, è ripetuto alla fine per rilevare il chiudersi su sè stesso di un percorso circolare, oppure con l'insieme $C = \{\{i_1, i_2\}, \{i_2, i_3\}, \dots, \{i_m, i_1\}\}$.

$i_3\}, \dots, \{i_m, i_1\}$ degli archi per i quali il ciclo medesimo transita; il numero m di quei nodi o, indifferentemente, di quegli archi è la *lunghezza* del ciclo. Indicheremo con $\mathcal{C}(x)$ la totalità dei cicli in un torneo x ; i cicli più brevi, di lunghezza 3, saranno anche detti *triadi*, e con $\mathcal{T}(x)$ verrà indicata la loro collezione.

Relativamente al nostro problema, su come approssimare ordini a tornei, il riferimento alle strutture circolari appare inevitabile e significativo, per la corrispondenza diretta esistente fra circolarità e intransitività di una relazione; si dimostra infatti (cfr. Moon (1968), topic 5 exercise 3, topic 7 theorem 9 (5)) che in un torneo transitività, assenza di cicli e assenza di triadi sono condizioni equivalenti; e il numero $|\mathcal{T}(x)|$ delle triadi in x è, in definitiva, il numero dei casi invalidanti la transitività della relazione X , espressa dalla (5), e costituisce perciò adeguata misura della intransitività del torneo. Questa misura sarà detta *indice di inconsistenza* per x , e verrà designata con la notazione $d(x)$; compare quale concetto centrale nel classico studio di Kendall & Babington Smith (1940) sulla comparazione per coppie, nel quale ritroviamo pure l'equazione

$$\begin{aligned} d(x) &= \binom{k}{3} - \sum_{i=1}^k \binom{s_x(i)}{2} \\ &= k(k-1)(k-2)/6 - \sum_{i=1}^k s_x(i)(s_x(i)-1)/2 \end{aligned} \quad (9)$$

che vincola direttamente l'indice $d(x)$ al vettore $s_x = (s_x(1), \dots, s_x(k))$ dei *punteggi* nel torneo x , ove $s_x(i)$ per $i = 1, \dots, k$ è il numero degli archi in uscita dal nodo i entro x (per una verifica immediata dell'equazione si veda Harary, Norman & Cartwright (1965), theorem 11.10). Disponiamo dunque di due differenti misure dell'intransitività di un torneo: l'indice di inconsistenza $d(x)$ e l'indice slateriano $i(x)$; il primo corrisponde al numero di smen-
tite che la condizione di transitività, nella sua enunciazione logica, subisce all'interno del dato torneo, mentre il secondo esprime la distanza minima fra questo torneo e i tornei che alla transitività si conformano perfettamente. Sarà ovviamente istruttivo indagare sui rapporti tra queste due misure, interna ed esterna, di intransitività; alcuni risultati, concernenti in particolare la correlazione tra i due indici, sono già dati in Slater (1961) § 5 e in Bezembinder (1981) § 9.

La rettifica di un torneo, la sua trasformazione in torneo transitivo, comporta, naturalmente, l'interruzione di ciascuno dei suoi (eventuali) cicli, per capovolgimento di almeno un arco in ogni ciclo; di qui l'interesse per quegli insiemi di archi in un torneo x che intersechino non a vuoto ognuno dei cicli in x , insiemi che qualificheremo come *c-tangenti* per x , ponendo formalmente

$D \subseteq N$ è c-tangente per x sse

$D \cap C \neq \emptyset$ per ogni $C \in \mathcal{C}(x)$

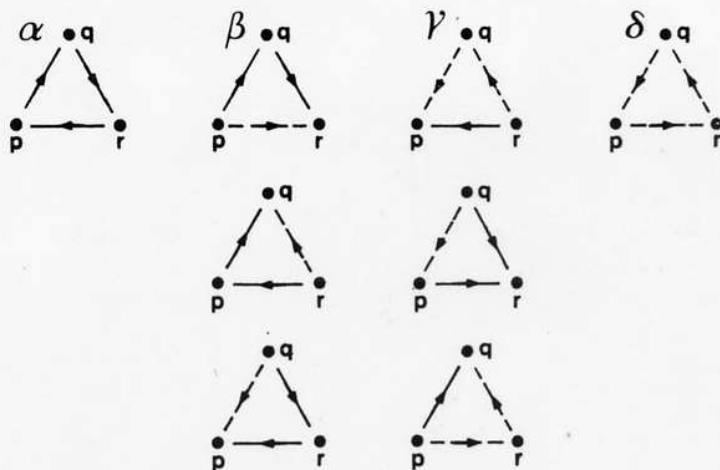
e intendendo i cicli stessi quali insiemi di archi. La famiglia dei c-tangenti per x costituisce un filtro d'ordine (cfr. Aigner (1979), p. 33) entro la totalità dei sottoinsiemi di N parzialmente ordinata secondo inclusione, poiché evidentemente un insieme di archi che includa un c-tangente forma a sua volta un c-tangente; a tale famiglia e, in particolare, ai suoi membri minimali fa riferimento il seguente.

4. Teorema: Per un arbitrario torneo x

(i) ogni risolutore è c-tangente,

(ii) ogni c-tangente minimale è risolutore.

dimostrazione (i) Se $D \subseteq N$ non fosse c-tangente per x allora esisterebbe $C \in \mathcal{C}(x)$ tale che $D \cap C = \emptyset$, sicché pure $C \in \mathcal{C}(x \setminus D)$, e quindi $x \setminus D$ non sarebbe transitivo, e D non costituirebbe per x un risolutore. (ii) Sia $D \subseteq N$ c-tangente minimale per x ; proveremo che D è pure risolutore per x verificando l'inesistenza di triadi entro $y = x \setminus D$. Si osservi innanzitutto che un'eventuale triade (p,q,r,p) potrebbe realizzarsi in y in una delle seguenti otto maniere:



in questi schemi sono indicati gli orientamenti validi in x , e sono tratteggiati gli archi appartenenti a D , soggetti quindi a capovolgimento nel passaggio da x a y ; proveremo l'impossibilità dei soli quattro casi della fila superiore, costituendo gli altri semplici variazioni dei casi intermedi. Caso α : In questa situazione la triade (p,q,r,p) figurerebbe già in x e, quale insieme di archi, risulterebbe disgiunta da D ; ma allora D non sarebbe c-tangente per x , contro l'ipotesi. Caso β : Nel secondo caso la triade (p,q,r,p) in y deriverebbe dalla terna transitiva (p,q,r) in x per capov

volgimento del solo arco $a_3 = \{p, r\}$. Sia $\mathcal{C}_3$ la collezione dei cicli in x contenenti l'arco a_3 ; sicuramente $\mathcal{C}_3 \neq \emptyset$, poiché altrimenti $D - \{a_3\}$ sarebbe c-tangente per x , contro l'assunta minimalità di D . Per un qualsiasi ciclo $C = (p, r, i_1, \dots, i_m, p)$ in $\mathcal{C}_3$ si ponga $\bar{C} = (p, q, i_{s+1}, \dots, i_m, p)$ oppure $(p, q, r, i_1, \dots, i_m, p)$ a seconda che esista o non esista un s tra 1 e m con $i_s = q$; ovviamente $\bar{C}$ descrive ancora un ciclo in x , per il quale, come insieme di archi, risulta

$$C - \bar{C} \supseteq \{a_3\} \quad , \quad \bar{C} - C \subseteq \{a_1, a_2\} \quad (10)$$

ove $a_1 = \{p, q\}$ e $a_2 = \{q, r\}$. Ora, se esistesse $C \in \mathcal{C}_3$ tale che $|C \cap D| = |\{a_3\}| = 1$, per la (10) e siccome $a_1, a_2 \notin D$ avremmo $\bar{C} \cap D = \emptyset$, e D non sarebbe c-tangente per x ; quindi $|C \cap D| > 1$ per ogni $C \in \mathcal{C}_3$; ma allora anche $D - \{a_3\}$ è c-tangente per x , contro l'ipotizzata minimalità di D . Caso γ : In questo terzo caso la triade (p, q, r, p) in y deriverebbe dalla terna transitiva (r, p, q) in x per capovolgimento degli archi a_1 e a_2 . Siano $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ le collezioni dei cicli in x contenenti a_1 e, rispettivamente, a_2 , collezioni sicuramente non vuote per l'assunta minimalità di D ; in corrispondenza ad arbitrari $C_1 = (q, p, i_1, \dots, i_m, q)$ in $\mathcal{C}_1$ e $C_2 = (r, q, j_1, \dots, j_n, r)$ in $\mathcal{C}_2$ possiamo comporre $C_1 \cdot C_2 = (p, i_1, \dots, i_m, q, j_1, \dots, j_n, r, p)$ che descrive un percorso entro x chiuso su se stesso e per il quale (trattando C_1 , C_2 e $C_1 \cdot C_2$ come insiemi di archi) risulta $(C_1 \cup C_2) - C_1 \cdot C_2 = \{a_1, a_2\}$ e $C_1 \cdot C_2 - (C_1 \cup C_2) = \{a_3\}$, e all'interno di $C_1 \cdot C_2$ è comunque possibile isolare un ciclo $\bar{C}_1 \cdot \bar{C}_2$ in x contenente a_3 , per il quale avremo

$$(C_1 \cup C_2) - \bar{C}_1 \cdot \bar{C}_2 \supseteq \{a_1, a_2\} \quad , \quad \bar{C}_1 \cdot \bar{C}_2 - (C_1 \cup C_2) = \{a_3\} \quad (11)$$

Ora, se esistessero $C_1 \in \mathcal{C}_1$ e $C_2 \in \mathcal{C}_2$ tali che $|C_1 \cap D| = |\{a_1\}| = 1$ e $|C_2 \cap D| = |\{a_2\}| = 1$, in base alla (11) e siccome $a_3 \notin D$ per l'associato $\bar{C}_1 \cdot \bar{C}_2$ sarebbe $\bar{C}_1 \cdot \bar{C}_2 \cap D = \emptyset$, e D non sarebbe c-tangente per x ; quindi o $|C_1 \cap D| > 1$ per ogni $C_1 \in \mathcal{C}_1$, sicché $D - \{a_1\}$ è c-tangente per x , oppure $|C_2 \cap D| > 1$ per ogni $C_2 \in \mathcal{C}_2$, e in tal caso $D - \{a_2\}$ è c-tangente per x ; ma entrambe le possibilità contraddicono la minimalità di D . Caso δ : La triade (p, q, r, p) in y deriverebbe in questa quarta circostanza dalla triade (p, r, q, p) in x per capovolgimento di tutti e tre gli archi a_1, a_2, a_3 . Detto $\mathcal{C}_h$, per $h = 1, 2, 3$, l'insieme dei cicli in x contenenti l'arco a_h , per l'assunta minimalità di D sicuramente $\mathcal{C}_h \neq \emptyset$; inoltre, con un procedimento simile a quello sopra descritto, per arbitrari $C_1 \in \mathcal{C}_1$, $C_2 \in \mathcal{C}_2$ e $C_3 \in \mathcal{C}_3$ è possibile determinare un ciclo $\bar{C}_1 \cdot \bar{C}_2 \cdot \bar{C}_3$ in x tale che

$$\overline{C_1 \cdot C_2 \cdot C_3} \subseteq (C_1 \cup C_2 \cup C_3) - \{a_1, a_2, a_3\}. \quad (12)$$

Se esistessero $C_1 \in \mathcal{C}_1$, $C_2 \in \mathcal{C}_2$ e $C_3 \in \mathcal{C}_3$ tali che $|C_h \cap D| = |\{a_h\}| = 1$ per $h = 1, 2, 3$, dalla (12) otterremmo $\overline{C_1 \cdot C_2 \cdot C_3} \cap D = \emptyset$, contro l'ipotesi che D sia c -tangente per x ; ma allora per qualche $h = 1, 2, 3$ sarà $|C_h \cap D| > 1$ in corrispondenza ad ogni $C_h \in \mathcal{C}_h$, e quindi $D - \{a_h\}$ è c -tangente per x , contro l'ipotizzata minimalità di D . Q.E.D.

Dal teorema seguono interessanti caratterizzazioni per i risolutori di minima cardinalità e per l'indice slateriano.

5. Corollario: *I risolutori m.c. per un torneo x sono gli insiemi c -tangenti per x di minima cardinalità; l'indice slateriano di x è la minima cardinalità degli insiemi di archi con intersezione non vuota rispetto ad ogni ciclo in x .*

Ritroviamo, verificata in altra maniera, questa stessa caratterizzazione per l'indice di Slater in Ramage & Thompson (1966), theorem 2.

Il seguito di questa sezione è dedicato allo studio delle triadi, in rapporto alla rettifica dei tornei. Riprendendo un'idea di Phillips (1967), per un qualsiasi torneo x , con famiglia triadi $\mathcal{T}(x)$, costruiremo una tabella $E(x) = (e(C, a) : C \in \mathcal{T}(x), a \in N)$ ponendo $e(C, a) = 1$ oppure 0 a seconda che l'arco a appartenga o non appartenga alla triade C , tabella che chiameremo *matrice triadi-per-archi* di x ; la seguente, ad esempio, è la matrice triadi-per-archi del torneo in figura 1.

	{1,2}	{1,3}	{1,4}	{1,5}	{2,3}	{2,4}	{2,5}	{3,4}	{3,5}	{4,5}
(1,2,4,1)	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0
(1,3,4,1)	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0
(1,3,5,1)	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0
(2,3,5,2)	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0
(2,4,5,2)	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1
	1	2	2	1	1	2	2	1	2	1

Di una triade che contenga un determinato arco a diremo che risulta *a carico* di a, e per *carico triadi* di a sarà inteso il numero delle triadi contenenti a; l'ultima riga della data tabella, somma delle righe precedenti, riporta i carichi triadi degli archi specificati in testa alle varie colonne. Qualificheremo come *t-tangente* per x un qualsiasi $D \subseteq N$ che contenga qualche arco di ciascuna delle tria-
di in x, sicché formalmente

$D \subseteq N$ è t-tangente per x sse

$D \cap C \neq \emptyset$ per ogni $C \in \mathcal{C}(x)$;

la famiglia dei t-tangenti include, evidentemente, la famiglia dei c-tangenti e, al pari di questa, costituisce un filtro d'ordine entro la totalità dei sottoinsiemi di N parzialmente ordinata secondo inclusione; per il teorema 4.1 anche ogni risolutore sarà t-tangente: una osservazione ovvia, che consente però di stabilire un significativo confine inferiore per l'indice slateriano, in funzione del vettore punteggi.

6. Proposizione: Per l'indice slateriano di un arbitrario torneo x risulta

$$i(x) \geq \left\lceil d(x) / \max_{(i,j) \in A_x} \min(k-s(i)-1, s(j)) \right\rceil \\ \geq \left\lceil \left(\binom{k}{3} - \sum_{i=1}^k \binom{s(i)}{2} \right) / \max_{(i,j) \in A_x} \min(k-s(i)-1, s(j)) \right\rceil$$

ove A_x , $(s(1), \dots, s(k))$ e $d(x)$ siano, nell'ordine, l'insieme degli archi orientati, il vettore punteggi e l'indice di inconsistenza del torneo x, e per z numero reale $[z]$ designi il minimo intero non inferiore a z.

dimostrazione Per qualsiasi arco $a \in N$ ($(i,j) \in A_x$) sia $T(a)$ ($T(i,j)$) l'insieme delle triadi in x a suo carico. Considerato D risolutore m.c. per x avremo, evidentemente, $|D| = i(x)$ e $\bigcup_{a \in D} T(a) = \mathcal{T}(x)$, essendo D t-tangente per x; ma allora

$$d(x) = |\mathcal{T}(x)| \leq \sum_{a \in D} |T(a)| \\ \leq i(x) \cdot \max_{a \in N} |T(a)| = i(x) \cdot \max_{(i,j) \in A_x} |T(i,j)|$$

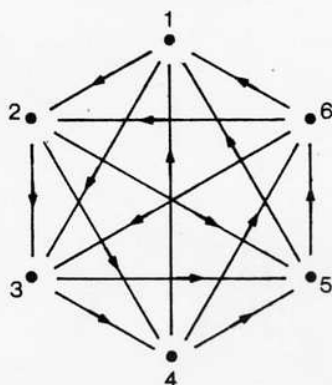
e quindi, essendo $i(x)$ numero intero,

$$i(x) \geq \left\lceil d(x) / \max_{(i,j) \in A_x} |T(i,j)| \right\rceil. \quad (13)$$

Se per un generico nodo h poniamo $K^+(h) = \{l \in K : l \not\sim h\}$ e $K^-(h) = \{l \in K : h \not\sim l\}$, sicché $|K^+(h)| = k-s(h)-1$ e $|K^-(h)| = s(h)$, avremo che le triadi in x contenenti un dato arco (i,j) saranno tante quanti

i punti nell'intersezione $K^+(i) \cap K^-(j)$; ma evidentemente $|K^+(i) \cap K^-(j)| \leq \min(|K^+(i)|, |K^-(j)|) = \min(k-s(i)-1, s(j))$, donde la conclusione, per la (13) e la (9). Q.E.D.

Esistono tornei nei quali l'indice slateriano raggiunge il con fine inferiore indicato; il torneo di figura 1 ne costituisce un e-sempio. Naturalmente, figurando i risolutori di un torneo fra i t-tangenti del medesimo, la minima cardinalità dei t-tangenti non può superare la minima cardinalità dei risolutori, che è l'indice slateriano del torneo; ma può accadere, in particolari tornei, che la prima sia più piccola della seconda, o non sussiste piuttosto fra le due generale uguaglianza, come (in base alla seconda parte del corollario 5) fra minima cardinalità dei risolutori e minima cardinalità dei c-tangenti? Ripetuti tentativi non hanno consentito di risolvere questo problema; è stata però accertata l'esistenza di t-tangenti con cardinalità identica all'indice slateriano e che tuttavia non sono dei risolutori; l'insieme di archi $\{\{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}\}$ entro il torneo di figura 1, e l'insieme di archi $\{\{1,4\}, \{2,5\}, \{3,5\}, \{4,6\}\}$ riferito al seguente torneo



sono degli esempi; simili casi mostrano che se modificassimo il corollario 5 facendo riferimento ai t-tangenti piuttosto che ai c-tangenti otterremo un enunciato la cui prima parte sarebbe sicuramente falsa, anche se l'identità asserita nella seconda dovesse valere.

Nella rettifica di un torneo, perché una triade risulti interrotta senza però tramutarsi nella propria capovolta occorre, evidentemente, che il risolutore contenga esattamente uno oppure esattamente due dei suoi archi; diremo in un caso che la triade è 1-risolta e, nell'altro, che essa è 2-risolta.

7. Teorema: *Ciascun arco in un risolutore D di minima cardinalità per un torneo x possiede a carico almeno una triade 1-risolta da D.*
dimostrazione Possiamo ipotizzare, senza perdere in generalità, $x \setminus D = \varepsilon = (1, \dots, k)$; per un assegnato arco $\{i, j\}$ in D, con $i < j$, consideriamo la trasposizione (i, j) e l'ordine $\zeta = \varepsilon_0(i, j)$; consideriamo pure gli insiemi $H = \{i+1, \dots, j-1\}$ e $L = \{i, i+1, \dots, j-1, j\}$ costi

tuenti intervalli in ε , il primo dei quali venga suddiviso nelle parti

$$\begin{aligned} H^{++} &= \{h \in H : i \xrightarrow{x} h, h \xrightarrow{x} j\}, & H^{+-} &= \{h \in H : i \xrightarrow{x} h, j \xrightarrow{x} h\} \\ H^{-+} &= \{h \in H : h \xrightarrow{x} i, h \xrightarrow{x} j\}, & H^{--} &= \{h \in H : h \xrightarrow{x} i, j \xrightarrow{x} h\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Confrontando il torneo ristretto $x|L$ e l'ordine ristretto $\varepsilon|L$ rileviamo che fra essi sono discordi l'arco $\{i, j\}$, ogni $\{i, h\}$ per $h \in H^{-+} \cup H^{--}$, ogni $\{h, j\}$ per $h \in H^{+-} \cup H^{--}$ e ciascun arco discorde fra $x|H$ e $\varepsilon|H$, sicché

$$d(x|L, \varepsilon|L) = 1 + |H^{+-}| + |H^{-+}| + 2|H^{--}| + d(x|H, \varepsilon|H); \quad (15)$$

riconosciamo analogamente che

$$d(x|L, \zeta|L) = |H^{+-}| + |H^{-+}| + 2|H^{++}| + d(x|H, \varepsilon|H) \quad (16)$$

notando, in particolare, che la trasposizione (i, j) toglie $\{i, j\}$ dagli archi discordi e che $\zeta|H = \varepsilon|H$. Ora, se l'arco $\{i, j\}$ non possedesse a carico alcuna triade 1-risolta da D , sarebbe $H^{++} = \emptyset$ e quindi, per la (15) e la (16), $d(x|L, \varepsilon|L) > d(x|L, \zeta|L)$: una disuguaglianza impossibile poiché, per l'ipotesi su D e per la proposizione 2.i, $\varepsilon|L$ è ordine m.p. per $x|L$. Q.E.D.

Dal teorema discendono significativi risultati particolari.

8. Corollario: *Ogni risolutore m.c. di un torneo x è t-tangente minimale per x .*

dimostrazione Già sappiamo che qualunque D risolutore di x è t-tangente per x ; se poi D è m.c. allora per ogni $a \in D$ l'insieme di archi $D - \{a\}$ non toccherà le triadi 1-risolte a carico di a , e non sarà perciò t-tangente. Q.E.D.

9. Corollario: *L'indice slateriano di un torneo x comunque non supera il suo indice di inconsistenza, ossia $i(x) \leq d(x)$.*

dimostrazione Possiamo definire una funzione iniettiva da un generico risolutore m.c. per x all'insieme delle triadi in x , associando a ciascun arco del risolutore una triade 1-risolta a suo carico. Q.E.D.

Immaginiamo di comporre un diagramma ad archi, del tipo esemplificato in figura 4, tracciando ad arbitrio alcuni archi continui e altri tratteggiati; siglati in un qualche ordine i nodi avremo definito, secondo le concordate norme grafiche, un torneo per il quale l'insieme degli archi tratteggiati costituisce un risolutore, non necessariamente di minima cardinalità. Chiediamoci: è possibile in ogni caso, con l'aggiunta di altri nodi e relativi archi tutti continui, estendere quello iniziale ad un torneo per il

quale l'originario insieme di archi tratteggiati sia risolutore di minima cardinalità? La risposta, positiva, è contenuta nella seguente

10. Proposizione: *Per un qualsiasi torneo x su $K = \{1, \dots, k\}$ e un arbitrario D suo risolutore esistono un numero naturale m e un torneo y su $\{1, \dots, k, k+1, \dots, k+m\}$ tali che y è estensione di x (ossia $x = y|K$) e D è l'unico risolutore m.c. per y .*

dimostrazione Posto $\xi = (\xi(1), \dots, \xi(k)) = x \setminus D$, il risolutore D venga ordinato parzialmente secondo il ricoprimento fra gli archi in ξ (si veda figura 3) e siano $a_0, a_1, \dots, a_{v-1}$ i suoi membri minimali, per i quali conveniamo $a_q = \{i_q, j_q\}$ con $\xi^{-1}(i_q) < \xi^{-1}(j_q)$ per $q = 0, 1, \dots, v-1$; inoltre, considerato per ogni termine in K il numero degli archi in D che lo contengono, sia λ il più grande fra tali numeri. Per s numero naturale indichiamo con N_s l'insieme degli archi (non orientati) relativi ai tornei sul dominio $\{1, \dots, k, k+1, \dots, k+s\}$; siano inoltre μ il massimo carico triadi in x per gli archi non compresi in D , $\sigma = \max(\lambda, \mu) + 1$ e $m = v \cdot \sigma$. Costituiamo ora una sequenza

$$(\xi_0, x_0), (\xi_1, x_1), \dots, (\xi_m, x_m)$$

di diagrammi ad archi a duplice tratto, ciascuno dei quali descriverà simultaneamente un ordine ξ_s e un torneo x_s ; la sequenza sia definita induttivamente identificando innanzitutto (ξ_0, x_0) con la rappresentazione del torneo x secondo l'ordine ξ , nella quale saranno tratteggiati i soli archi in D ; quindi per $s = 0, 1, \dots, m-1$, posto $s = q \cdot \sigma + r$ con $r = 0, 1, \dots, \sigma-1$, si costituisca (ξ_{s+1}, x_{s+1}) arricchendo (ξ_s, x_s) di un nuovo termine $k+s+1$, da inserire in una posizione $p(s+1)$ sulla destra di $\xi_s^{-1}(i_q)$ ma non di $\xi_s^{-1}(j_q)$, e convenendo siano tutti continui gli archi incidenti sul nuovo termine. In questo modo passando da un diagramma a quello successivo non sono introdotti nuovi archi discordi, sicché $D(x_{s+1}, \xi_{s+1}) = D(x_s, \xi_s)$ per $s = 0, 1, \dots, m-1$; ma allora, siccome $D(x_0, \xi_0) = D$, sarà $D(x_m, \xi_m) = D$, e l'insieme di archi D costituisce quindi un risolutore per il torneo $y = x_m$. Non resta dunque che verificare la non esistenza per y di altri risolutori con cardinalità minore od uguale alla cardinalità di D ; a tal fine consideriamo per $s = 0, 1, \dots, m-1$ e per $a = \{i, j\} \in N_{s+1}$, con $\xi_{s+1}^{-1}(i) < \xi_{s+1}^{-1}(j)$, la composizione dell'insieme $T_{s+1}(a)$ delle triadi nel torneo x_{s+1} a carico dell'arco a . In base al descritto procedimento di costruzione riconosciamo che: se $a \in D$ allora $T_{s+1}(a) = T_s(a) \cup \{(i, k+s+1, j, i)\}$ oppure $T_{s+1}(a) = T_s(a)$ a seconda che risulti oppure no $\xi_s^{-1}(i) < p(s+1) \leq \xi_s^{-1}(j)$ (queste relazioni valgono sicuramente se, per $s = q \cdot \sigma + r$ con $r = 0, 1, \dots, \sigma-1$, l'arco a ricopre l'arco a_q minimale in D); se $a \in N_s - D$ allora $T_{s+1}(a) = T_s(a)$; e

se $a \in N_{s+1} - N_s$ allora $T_{s+1}(a) = \{(i, k+s+1, l, i) : \{i, l\} \in D, \xi_s^{-1}(l) \geq p(s+1)\}$ per $a = \{i, k+s+1\}$ con $\xi_s^{-1}(i) < p(s+1)$, mentre $T_{s+1}(a) = \{(h, k+s+1, j, h) : \{h, j\} \in D, \xi_s^{-1}(h) < p(s+1)\}$ per $a = \{k+s+1, j\}$ con $\xi_s^{-1}(j) \geq p(s+1)$. Da questi rilievi inferiamo che, al termine del processo, a ciascun arco $a \in D$ corrisponderà un insieme $T_m^1(a)$ di almeno σ triadi entro y l-risolte da D a carico di a , mentre per ogni $a \in N_m - D$ sarà $|T_m(a)| \leq \max(\lambda, \mu) < \sigma$. Supponiamo ora esista per y un risolutore $E \neq D$ con $|E| \leq |D|$, sicché pure $|E-D| \leq |D-E|$; le triadi nell'insieme $\bigcup_{a \in D-E} T_m^1(a)$, in numero non inferiore a $\sigma \cdot |D-E|$, non possono essere rettificare dagli archi in $D \cap E$, poiché tali triadi sono l-risolte da D a carico degli archi in $D-E$; dovranno quindi essere rettificare dagli archi in $E-D$; ma ciò non può accadere, giacché gli archi in $E-D$ sono in grado di risolvere al più $\sum_{a \in E-D} |T_m(a)|$ triadi, un numero più piccolo di $\sigma \cdot |D-E|$. Q.E.D.

Potremmo interpretare questa proposizione con riferimento alla famiglia degli archi ordinata parzialmente secondo ricoprimento dicendo che l'essere di minima cardinalità non impone ad un risolutore alcuna restrizione se tale famiglia è vista dall'alto verso il basso, senza una profondità prefissata; precise restrizioni si danno invece nella direzione opposta, come risulta dalla proposizione 3.

Potremmo operare la rettifica di un torneo x secondo un risolutore $D = \{a_1, \dots, a_p\}$ in forma sequenziale, fissando un ordine $(a_{r_1}, \dots, a_{r_p})$ fra gli archi in D e determinando uno dopo l'altro i tornei

$$x_0 = x, x_1 = x_0 \setminus a_{r_1}, \dots, x_p = x_{p-1} \setminus a_{r_p} \quad (17)$$

ove per l'ultima equazione in (4) sarà $x_p = x \setminus D$, l'ordine realizzato da D su x . Considerata in parallelo la sequenza $\mathcal{T}(x_0), \mathcal{T}(x_1), \dots, \mathcal{T}(x_p)$ degli insiemi delle triadi nei singoli tornei, avremo $\mathcal{T}(x_0) \neq \emptyset$ (a meno che x sia già transitivo) mentre sicuramente $\mathcal{T}(x_p) = \emptyset$; il processo di rettifica comporta dunque l'annullamento, passo dopo passo, di tutte le triadi del torneo originario. Non necessariamente però questo annullamento risulta progressivo, nel senso che $\mathcal{T}(x_0) \supseteq \mathcal{T}(x_1) \supseteq \dots \supseteq \mathcal{T}(x_p)$; è vero infatti che il capovolgimento di un arco provoca la risoluzione, senza ritorno, delle triadi fino ad allora a suo carico; ma è anche vero che il medesimo capovolgimento potrebbe rendere circolari terne inizialmente transitive, le quali saranno nuovamente rettificare capovolgendo archi successivi. Ma allora, in quali casi possiamo ordinare gli archi di un risolutore in modo tale che l'annullamento delle triadi risulti progressivo, nel senso indicato? Una condizione sufficiente viene enunciata nella seguente

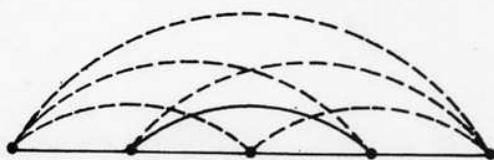
11. Proposizione: *Siano x un torneo e D un suo risolutore. Se non esiste in x alcuna terna transitiva i cui archi siano tutti presenti in D , allora è possibile ordinare D in modo tale che nella rettifica sequenziale l'annullamento delle triadi risulti progressivo.*

dimostrazione Notiamo in primo luogo, con riferimento alla rappresentazione del torneo x secondo l'ordine $\xi = x \setminus D$, che degli otto schemi possibili per una terna di x i soli ad ammettere l'eventuale formazione di una nuova triade sono



precisamente, nel primo e nel secondo schema si costituisce una nuova triade qualora dei due archi tratteggiati venga capovolto per primo quello inferiore; nel terzo invece quando dei tre archi sia capovolto per primo quello superiore. Ora, escluso per ipotesi il terzo schema, se ordiniamo parzialmente il risolutore D secondo il ricoprimento fra gli archi in ξ e scomponiamo il medesimo D in strati $D_1, D_2, \dots, D_t$ raccogliendo in D_1 gli archi massimali entro D , in D_2 gli archi massimali entro $D - D_1$, ecc., un qualsiasi ordine $(a_{11}, \dots, a_{1p_1}, \dots, a_{t1}, \dots, a_{tp_t})$ nel quale $\{a_{s1}, \dots, a_{sp_s}\} = D_s$ per $s = 1, \dots, t$ avrà il carattere richiesto. Q.E.D.

Notiamo che fuori dalla detta condizione non sempre è possibile ordinare un risolutore alla maniera desiderata; nel seguente diagramma, ad esempio,



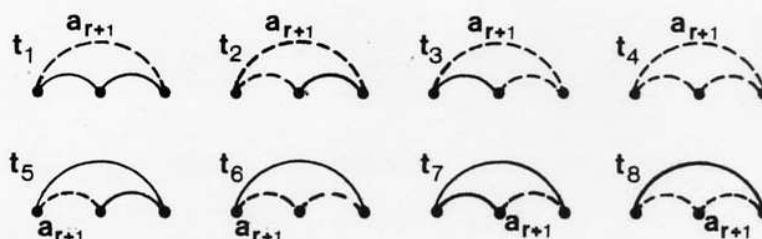
quale che sia l'arco tratteggiato che per primo viene capovolto si costituisce una nuova terna circolare. Il rilievo rimane valido, in base alla proposizione 10, anche quando il risolutore sia assunto di minima cardinalità.

Seguitando questo genere di riflessioni passiamo ora a considerare, parallelamente alla (17), le sequenze $i(x_0), i(x_1), \dots, i(x_p)$ degli indici slateriani e $d(x_0), d(x_1), \dots, d(x_p)$ degli indici di inconsistenza dei vari tornei; ovviamente $i(x_p) = 0 = d(x_p)$ e, posto che x non sia già transitivo, $i(x_0) > 0$ e $d(x_0) > 0$, sicché al processo di rettifica si accompagna la discesa verso lo zero di entrambi gli indici di intransitività. Riterremo l'annullamento dell'indice i strettamente progressivo se la corrispondente sequenza numerica è strettamente decrescente, quando cioè $i(x_0) > i(x_1) >$

... $> i(x_p)$; similmente per l'indice d .

12. Proposizione: *Siano x un torneo e D un suo risolutore. Se D è di minima cardinalità allora qualunque suo ordine darà una rettifica sequenziale di x nella quale l'annullamento dell'indice slateriano risulta strettamente progressivo, e per qualche suo ordine è strettamente progressivo pure l'annullamento dell'indice di inconsistenza.*

dimostrazione La parte relativa all'indice slateriano segue direttamente dalla proposizione 2.iv. Passiamo quindi alla verifica della parte sull'indice di inconsistenza, e al riguardo, assunto per semplicità $x \setminus D = \varepsilon = (1, \dots, k)$, sia $(a_1, \dots, a_p)$ un ordine su D del tipo definito verificando la proposizione 11, un ordine cioè nel quale ogni arco in D preceda qualsiasi altro arco in D da esso ricoperto entro ε ; si costituisca la sequenza $x_0 = x$, $x_1 = x_0 \setminus a_1, \dots$, $x_p = x_{p-1} \setminus a_p$ e, per un arbitrario $r = 0, 1, \dots, p-1$, si confrontino gli indici $d(x_r)$ e $d(x_{r+1}) = d(x_r \setminus a_{r+1})$. Dall'ultima equazione in (4) e per la proposizione 2.iv avremo che $\varepsilon = x_r \setminus \{a_{r+1}, \dots, a_p\}$ è ordine m.p. per il torneo x_r ; inoltre, rappresentato x_r secondo ε , non ricoprendo a_{r+1} in ε nessuno degli altri archi discordi tra ε e x_r , per una qualsiasi terna in x_r che contenga a_{r+1} dovrà valere uno dei seguenti otto schemi:

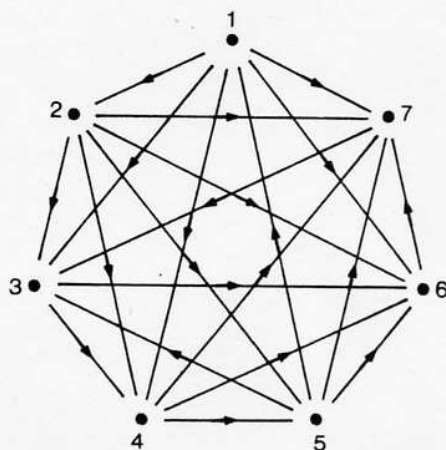


per $h = 1, \dots, 8$ sia T_h l'insieme delle terne in x_r di tipo t_h . Osserviamo ora che il capovolgimento dell'arco a_{r+1} nei casi t_2, t_3, t_5 e t_7 da una terna transitiva produce una nuova terna transitiva, in t_1, t_6 e t_8 da una terna circolare genera una terna transitiva, mentre in t_4 trasforma una terna transitiva in circolare; pertanto

$$d(x_r) - d(x_{r+1}) = |T_1| + |T_6| + |T_8| - |T_4|. \quad (18)$$

Supposto $a_{r+1} = \{i, j\}$ con $i < j$, si suddivida l'insieme H dei termini situati in ε tra i e j nelle parti H^{++}, H^{+-}, H^{-+} e H^{--} in conformità alla (14) secondo il torneo x_r ; chiaramente $|T_1| = |H^{++}|$ e $|T_4| = |H^{--}|$. Non può essere $|H^{++}| \leq |H^{--}|$, poiché altrimenti ap-

plicando a ε la trasposizione (i,j) avremmo $d(x_r, \varepsilon) - d(x_r, \varepsilon \circ (i,j)) \geq 1 + |H^{--}| - |H^{++}| > 0$, contro la massima prossimità di ε a x_r ; quindi $|T_1| > |T_4|$ e, per la (18), pure $d(x_r) > d(x_{r+1})$. Q.E.D. Non tutti gli ordini su un risolutore m.p. rendono strettamente progressivo l'annullamento dell'indice di inconsistenza; per il seguente torneo, ad esempio,



nel quale $d = 5$, l'insieme di archi $\{\{1,5\}, \{3,5\}, \{3,7\}\}$ costituisce un risolutore m.p.; ma se iniziamo la sua rettifica capovolgendo l'arco $\{3,5\}$ avremo al primo passo $d = 6$.

5. RETTIFICA DI UN TORNEO E SUE CONGRUENZE

Con riferimento ad un torneo x su K diremo che un dato nodo i è *fortemente connesso* ad un nodo j , e scriveremo $i \overset{x}{\sim} j$, quando i e j coincidano oppure esistano in x percorsi sia da i a j che da j a i ; in formula

$i \overset{x}{\sim} j$ sse $i = j$ oppure

$$i \overset{x}{\rightarrow} h_1 \overset{x}{\rightarrow} \dots \overset{x}{\rightarrow} h_p \overset{x}{\rightarrow} j \quad \text{e} \quad j \overset{x}{\rightarrow} l_1 \overset{x}{\rightarrow} \dots \overset{x}{\rightarrow} l_q \overset{x}{\rightarrow} i$$

per convenienti $h_1, \dots, h_p, l_1, \dots, l_q \in K$.

Codesta connessità forte tra nodi costituisce, evidentemente, relazione riflessiva, simmetrica e transitiva, ossia un'equivalenza sul dominio K ; essa coincide con l'identità su K per x torneo transitivo; nel caso opposto, quando la connessità forte sia l'equivalenza universale, quando cioè tutti i nodi risultino a due a due fortemente connessi, il torneo x è ritenuto *forte* (o *fortemente connesso*) (cfr.

Moon (1968), topic 3). Ad un torneo x corrisponde pure una *scomposizione transitiva* $x/\mathcal{X} = (K_1, \dots, K_m)$, definita quale partizione ordinata del dominio K nelle classi d'equivalenza secondo la connessità forte, dette *componenti forti* di x , disposte in modo tale che per $1 \leq p < q \leq m$ sia $i \rightarrow j$ per arbitrari $i \in K_p$ e $j \in K_q$; in base alla connessità forte un torneo x si risolve dunque nella scomposizione transitiva $x/\mathcal{X}$, che è torneo transitivo "tra" i blocchi determinati in K dall'equivalenza $\mathcal{X}$, e nei tornei ristretti $x|_{K_1}, \dots, x|_{K_m}$ "entro" i blocchi, ciascuno dei quali è sottotorneo forte massimale in x ; ovviamente se x è transitivo allora $x/\mathcal{X}$ consisterà in una sequenza di singletons, identica ad x nella sostanza, mentre se x è forte allora K è la sua unica componente forte: per questo i tornei forti sono anche detti *irriducibili* (cfr. Moon (1968), theorem 2). Importa rilevare che la scomposizione transitiva di un torneo può essere inferita direttamente dal suo vettore punteggi; disposti infatti questi punteggi in un ordine $s(i_1) \geq \dots \geq s(i_k)$ secondo grandezza non crescente e individuati gli indici $1 = j_1 < \dots < j_m \leq k$ tali che $\sum_{h=j_p}^{j_{p+1}-1} s(i_h) = \binom{k-j_p+1}{2}$ per $p = 1, \dots, m$, avremo, richiamando un classico risultato di Landau (1953), $K_p = \{i_{j_p}, i_{j_p+1}, \dots, i_{j_{p+1}-1}\}$ per $p = 1, \dots, m-1$ e $K_m = \{i_{j_m}, i_{j_m+1}, \dots, i_k\}$; questo criterio applicato al seguente torneo

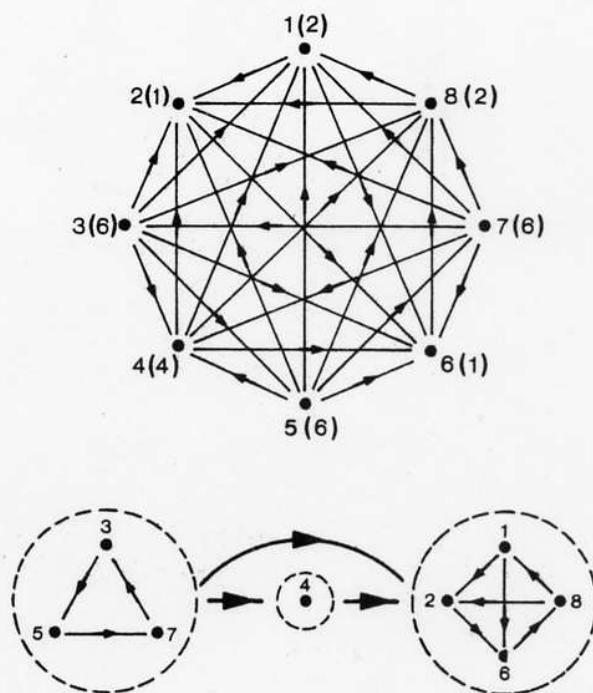


FIGURA 7. Torneo fra $k = 8$ nodi e associata scomposizione transitiva. Il numero tra parentesi accanto a ciascun nodo è il suo punteggio.

mostra, ad esempio, che $K_1 = \{3,5,7\}$, $K_2 = \{4\}$ e $K_3 = \{1,2,6,8\}$ sono le sue componenti forti; il diagramma nella parte inferiore della figura costituisce quindi una espressione alternativa, e più chiara, del torneo dato. In che rapporto stanno gli ordini m.p. di un torneo con l'ordine debole determinato su K dalla sua scomposizione transitiva?

13. Proposizione: *Ogni ordine ξ di massima prossimità per un dato torneo x è compatibile con la sua scomposizione transitiva $x/\mathcal{X} = (K_1, \dots, K_m)$, nel senso che per arbitrari $1 \leq p < q \leq m$, $i \in K_p$ e $j \in K_q$ risulta $i \not\xrightarrow{\xi} j$; le componenti forti di x costituiscono in ξ degli intervalli, che si susseguono secondo l'ordine $x/\mathcal{X}$.*

dimostrazione Considerato $\xi = (\xi(1), \dots, \xi(k))$ ordine m.p. per x supponiamo, per assurdo, esistano $1 \leq h < l \leq k$ e $1 \leq p < q \leq m$ tali che $\xi(h) \in K_q$ e $\xi(l) \in K_p$; designato per $u = 1, \dots, k$ con $b(u)$ l'indice della componente forte contenente il nodo $\xi(u)$, siccome $b(h) = q$, $b(l) = p$ e $p < q$ dovrà esistere u' tra h e $l-1$ tale che $b(u') > b(u'+1)$; avremo dunque $\xi(u'+1) \not\xrightarrow{\xi} \xi(u')$, e l'arco $\{\xi(u'), \xi(u'+1)\}$ sarà quindi discorde tra x e ξ ; ma questo è il primo dei casi esclusi dalla proposizione 3. Q.E.D.

Dal precedente enunciato e dalla proposizione 2.i ricaviamo che per la determinazione di un ordine m.p. potremmo procedere stabilendo innanzitutto la scomposizione transitiva $x/\mathcal{X} = (K_1, \dots, K_m)$ del dato torneo, individuando successivamente per $p = 1, \dots, m$ un ordine ξ_p su K_p che sia m.p. per il sottotorneo $x|_{K_p}$, e disponendo infine questi ordini settoriali nella sequenza $(\xi_1, \dots, \xi_m)$; in questo modo, ad esempio, troviamo senza difficoltà che $((3,5,7), (4), (1,2,6,8)) = (3,5,7,4,1,2,6,8)$ è ordine m.p. per il torneo in figura 7. Riconosciamo pure che

$$i(x) = i(x|_{K_1}) + \dots + i(x|_{K_m}), \quad (19)$$

ossia che l'indice slateriano di un torneo è la somma degli indici slateriani dei sottotornei sulle componenti forti (si veda pure, al riguardo, Bezembinder (1981), Appendix); e che, in generale, nel trattare questioni relative alla rettifica dei tornei possiamo limitarci a considerare i tornei forti, potendo le soluzioni essere estese facilmente ai tornei riducibili, seguendo l'accostamento seriale fra le componenti forti.

Illustriamo il significato dell'ultima osservazione tornando a riflettere sul rapporto fra indice slateriano e indice di inconsistenza. Sappiamo dal corollario 9 che $i \leq d$, l'indice di inconsistenza costituisce cioè un generale confine superiore per l'indice slateriano. Ovviamente, in un torneo degenerare (su un singolo nodo) $i = 0 = d$, e in un torneo forte su tre nodi $i = 1 = d$; d'altro can

to, l'insieme delle triadi in un torneo x è unione disgiunta degli insiemi delle triadi nei sottotornei $x|K_1, \dots, x|K_m$ generati dalle sue componenti forti, sicché parallelamente alla (19)

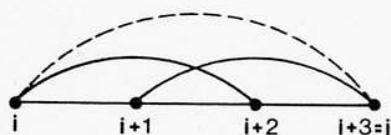
$$d(x) = d(x|K_1) + \dots + d(x|K_m); \quad (20)$$

ma allora, se le componenti forti in x sono tutte di cardinalità 1 oppure 3 (la cardinalità 2 risulta impossibile) avremo che $i(x)$ e $d(x)$ corrispondono entrambi al numero delle componenti forti di cardinalità 3, e quindi coincidono. Questo però è un caso particolare; il rapporto fra gli indici d ed i è paragonabile al rapporto fra la cardinalità di un insieme (la collezione delle triadi in un torneo) e la numerosità minima di una famiglia di speciali suoi sottoinsiemi capace di ricoprirla (la famiglia degli insiemi di triadi a carico dei singoli archi di un risolutore), sicché di regola l'indice di inconsistenza supera di un buon margine l'indice slateriano. E' pensabile quindi si possano determinare per la i di Slater confini superiori più precisi, più piccoli cioè dell'indice d ; un primo passo in questa direzione è compiuto con la seguente

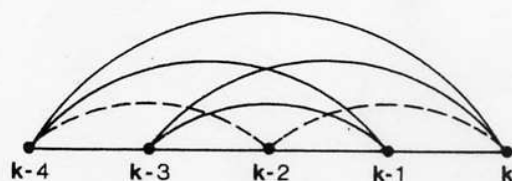
14. Proposizione: *Per qualsiasi x torneo forte su un insieme di $k \geq 4$ nodi risulta $i(x) \leq d(x) - 1$.*

dimostrazione I tornei forti su $k = 4$ nodi sono isomorfi a quello dato in figura 5, nel quale evidentemente $i = 1$ e $d = 2$. Consideriamo quindi x torneo forte su $K = \{1, \dots, k\}$ con $k \geq 5$; specificato D suo risolutore m.c. assumiamo, per non complicare la notazione, $x \setminus D = \varepsilon = (1, \dots, k)$; stante il teorema 7 basterà verificare l'esistenza in D di qualche arco avente a carico almeno due triadi del torneo x .
(i) Supponiamo dapprima esista $a = \{i, j\} \in D$ con $j - i \geq 4$. Diviso l'insieme H dei $j - i - 1$ termini situati in ε tra i e j in quattro parti H^{++} , H^{+-} , H^{-+} e H^{--} secondo le espressioni (14), notiamo innanzitutto che H^{++} contiene ogni termine h costituente con i e j una triade (i, h, j, i) 1-risolta a carico di a , sicché per il teorema 7 sicuramente $H^{++} \neq \emptyset$, e se $|H^{++}| > 1$ la conclusione sarebbe raggiunta; supponiamo dunque $|H^{++}| = 1$. Sotto questa condizione deve risultare $H^{--} = \emptyset$, poiché altrimenti applicando a ε la trasposizione (i, j) avremmo $d(x, \varepsilon \circ (i, j)) < d(x, \varepsilon)$, disuguaglianza incompatibile con la massima prossimità di ε a x ; ma allora pure $|H^{+-}| \geq |H^{-+}|$, giacché in caso contrario $d(x, \varepsilon \circ [i, j]) < d(x, \varepsilon)$ per la traslazione destra $[i, j]$, e $|H^{+-}| \leq |H^{-+}|$, poiché altrimenti $d(x, \varepsilon \circ [j, i]) < d(x, \varepsilon)$ per la traslazione sinistra $[j, i]$; dunque $|H^{+-}| = |H^{-+}|$, e pertanto $j - i - 1 = |H| = 1 + 2|H^{+-}|$ è numero di spari. Ora, $\{i, i+1\} \notin D$ e $\{j-1, j\} \notin D$ per la proposizione 3, e quindi da $|H^{++}| = 1$ segue $\{i+1, j\} \in D$ oppure $\{i, j-1\} \in D$; sia, ad esem-

pio, $b = \{i+1, j\} \in D$. Se l'arco b possedesse a carico soltanto una triade 1-risolta allora, ripetendo le considerazioni svolte per a , arriveremmo a concludere che $j-(i+1)-1 = j-i-2$ è numero dispari, lad dove è $j-i-1$ a risultare dispari; quindi o a carico di a o a carico di b devono figurare almeno due triadi 1-risolte. (ii) Consideriamo ora il caso in cui non esistano in D archi che su ϵ assumano ampiezza maggiore di 3, ma si dia $a = \{i, j\} \in D$ con $j-i = 3$; per la proposizione 3 nella rappresentazione di x secondo ϵ si realizzerà lo schema



entro il quale $(i, i+1, j, i)$ e $(i, i+2, j, i)$ sono triadi 1-risolte a carico di a . (iii) Supponiamo infine che tutti gli archi in D posseggano su ϵ ampiezza 2. Nel torneo x , assunto forte, esiste un ciclo di lunghezza k (un circuito hamiltoniano; si veda Camion (1959); oppure Moon (1968), theorem 3); quindi, sotto la detta ipotesi e per la proposizione 3 varrà lo schema



nel quale $(k, k-2, k-1, k)$ e $(k, k-2, k-4, k)$ sono triadi distinte a carico dell'arco $\{k, k-2\}$ in D . Q.E.D.

Dal precedente enunciato e dalle formule (19) e (20) direttamente il

15. Corollario: *In un qualsiasi torneo x , detto $v(x)$ il numero delle sue componenti forti di cardinalità superiore a 3, risulta $i(x) \leq d(x) - v(x)$.*

Nell'intento di pervenire ad altre modalità di riduzione di un torneo ad una struttura "tra" blocchi e a strutture complementari "entro" blocchi, quale si realizza nella scomposizione transitiva, siamo portati a considerare, come possibili blocchi, gli insiemi di nodi indistinguibili per i rapporti con i nodi esterni agli insiemi stessi; si tratta dei cosiddetti sottoinsiemi convessi di un torneo (cfr. Erdős, Fried, Hajnal & Milner (1972), definition 1), per i

quali è data la seguente definizione: $H \subseteq K$ è insieme *convesso* in un torneo x su K se per arbitrari i, j in H e l in $K-H$ risulta $i \not\prec l$ oppure $l \not\prec i$ a seconda che $j \not\prec l$ oppure $l \not\prec j$; equivalentemente, H è convesso in x se per arbitrari $i, j \in H$ e $l \in K-H$ da $i \not\prec l$ e $l \not\prec j$ segue $l \in H$, una formulazione alternativa che giustifica l'impiego dell'aggettivo "convesso" nel qualificare questo genere di insiemi. Dato H sottoinsieme convesso di un torneo x su K , per un qualsiasi nodo l in $H^c = K-H$ avremo che o l domina secondo x tutti i termini in H , nel qual caso scriveremo $l \prec H$, oppure l è dominato in x da ciascuno di quei nodi, e scriveremo allora $H \prec l$; posto $H^{c+} = \{l \in H^c : l \prec H\}$ e $H^{c-} = \{l \in H^c : H \prec l\}$ la coppia (H^{c+}, H^{c-}) , detta *bipartizione complementare* associata ad H , costituisce dunque una partizione del complemento H^c dell'insieme H in K . Indicheremo con $\mathcal{H}(x)$ la totalità dei sottoinsiemi di K convessi in un torneo x ; ovviamente, quale che sia il torneo, sono convessi l'insieme vuoto $\emptyset$, l'intero dominio K e ogni singleton $\{i\}$ per $i \in K$; quando la famiglia $\mathcal{H}(x)$ si componga di questi soli membri d'obbligo, detti *convessi banali*, il torneo x è ritenuto *semplice* (cfr. Erdős e altri (1972), definition 2). Si riconosce facilmente che l'intersezione fra arbitrari insiemi convessi è convessa, e che convesse sono pure l'unione fra convessi non disgiunti e la differenza fra due convessi il primo dei quali non includa il secondo (cfr. Varlet (1975), theorem 1.1); parzialmente ordinata secondo l'inclusione insiemistica la famiglia $\mathcal{H}(x)$ costituisce un reticolo, nel quale l'operazione di meet è l'intersezione e l'operazione di join fra convessi non disgiunti è l'unione, un reticolo atomico, i cui atomi sono i singletons in K , e nel quale ogni filtro risulta distributivo (cfr. Varlet (1975), corollary 1.1).

Chiaramente, ciascuna delle componenti forti di un torneo è convessa, e convessa risulta pure l'unione di una qualsiasi sequenza di componenti forti costituente un intervallo entro la scomposizione transitiva (e pertanto i tornei semplici sono anche forti); dal successivo enunciato risulta che non si danno in un torneo altri insiemi convessi se non all'interno delle singole componenti forti.

16. Proposizione: *Siano x un torneo riducibile e $(K_1, \dots, K_m)$ la sua scomposizione transitiva. Per H sottoinsieme convesso non vuoto di x , detti p e q gli indici della prima e dell'ultima fra le componenti forti con qualche termine in H , se $p < q$ allora $H = \bigcup_{r=p}^q K_r$.*

dimostrazione Naturalmente $H \subseteq \bigcup_{r=p}^q K_r$, per la scelta stessa di p e q . Passiamo quindi alla verifica dell'inclusione inversa, designando innanzitutto due termini, i_1 in $H \cap K_p$ e j_1 in $H \cap K_q$, e due circuiti hamiltoniani $(i_1, i_2, \dots, i_k, i_1)$ entro $x|K_p$ e $(j_1, j_2, \dots, j_{k_q}, j_1)$ entro $x|K_q$, l'esistenza dei quali nei due sottotornei forti è garantita dal teorema di Camion (1959). Per ogni r maggiore di

p e minore di q sarà $i_1 \not\prec_{K_p} j_1$, e quindi $K_p \subseteq H$ per la convessità di H ; riconosciamo poi, secondo uno schema induttivo, che $i_s \in H$ per ogni $s = 1, \dots, k_p$, sicché $K_p \subseteq H$; infatti $i_1 \in H$ dalla scelta di i_1 mentre per $s = 2, \dots, k_p$ da $i_{s-1} \in H$, $j_1 \in H$ e $i_{s-1} \not\prec_{K_p} j_1$ segue $i_s \in H$ per la convessità di H ; similmente $K_q \subseteq H$, sicché in definitiva $\bigcup_{r=p}^q K_r \subseteq H$. Q.E.D.

La *chiusura convessa* $\bar{G}$ di un arbitrario insieme di nodi G in un torneo x è definita come il più piccolo fra gli insiemi convessi in x che includono G , ovviamente identico a G quando questo sia già convesso. In un torneo transitivo gli insiemi convessi sono i suoi intervalli, ciascuno dei quali se di cardinalità maggiore di 1 è chiusura convessa di una coppia di nodi, i suoi due estremi; invero questa proprietà, come sostiene il seguente enunciato, è condivisa da tutti i tornei, anche da quelli non transitivi, nei quali però accade che qualche insieme sia chiusura convessa di differenti coppie di nodi.

17. Proposizione: *Per ogni insieme H convesso in un torneo x con cardinalità maggiore di 1 esiste qualche coppia di nodi in x della quale H è chiusura convessa.*

dimostrazione Verifichiamo dapprima la proprietà assumendo che il sottotorneo $x|H$ generato da H in x sia riducibile. Sotto questa condizione, scelti ad arbitrio un termine i entro la prima e un termine j entro l'ultima delle componenti forti di $x|H$, e indicate con $\{i, j\}'$ e $\{i, j\}$ le chiusure convesse della coppia $\{i, j\}$ in $x|H$ e, rispettivamente, in x , per la proposizione 16 sarà $H = \{i, j\}'$, e siccome $\{i, j\}' \subseteq \{i, j\}$ avremo $H \subseteq \{i, j\}$; ma evidentemente anche $\{i, j\} \subseteq H$ poiché $\{i, j\} \subseteq H$ e H è convesso; dunque $H = \{i, j\}$. Passiamo quindi al caso generale. Designati due qualsiasi nodi i_1, j_1 in H , si consideri la partizione $H = \{i_1, j_1\} \cup L_1^+ \cup L_1^-$ di H nella chiusura convessa della coppia $\{i_1, j_1\}$ e negli insiemi $L_1^+ = \{l \in H : l \not\prec_{\{i_1, j_1\}} i_1\}$ e $L_1^- = \{l \in H : \{i_1, j_1\} \not\prec l\}$; può accadere che $L_1^+ = \emptyset$ e $L_1^- = \emptyset$, sicché $H = \{i_1, j_1\}$, e in questo caso la conclusione è raggiunta; oppure che ($L_1^+ \neq \emptyset$ o $L_1^- \neq \emptyset$) e $L_1^+ \not\prec L_1^-$ ($l \not\prec l'$ per arbitrari $l \in L_1^+, l' \in L_1^-$), e in tal caso $x|H$ è torneo riducibile e varrà quindi la parte iniziale della dimostrazione; oppure che congiuntamente $L_1^+ \neq \emptyset$, $L_1^- \neq \emptyset$, non ($L_1^+ \not\prec L_1^-$). In questo terzo caso procediamo a considerare un termine i_2 in L_1^+ , un termine j_2 in L_1^- e la partizione $H = \{i_2, j_2\} \cup L_2^+ \cup L_2^-$ definita in modo analogo alla precedente e nella quale evidentemente $\{i_2, j_2\} \not\subseteq \{i_1, j_1\}$, $L_2^+ \not\subseteq L_1^+$ e $L_2^- \not\subseteq L_1^-$; anche per questa partizione si danno tre possibilità, delle quali le prime due conducono alla soluzione; se vale la terza passeremo ad una nuova coppia di nodi e ad una nuova tripartizione di H . Questo processo prima o poi si concluderà alla maniera desiderata, poiché il terzo dei casi indicati richiede che $L_2^+ \neq \emptyset$ e $L_2^- \neq \emptyset$,

le sequenze di insiemi $L_1^+, L_2^+, \dots$ e $L_1^-, L_2^-, \dots$ sono strettamente de crescenti, e il dominio del torneo è finito. Q.E.D.

Dalla proposizione segue, in particolare, che i sottoinsiemi convessi di un torneo su k nodi sono al più $\binom{k}{2} + k + 1$, numero eguagliato nei soli tornei transitivi: un risultato già raggiunto per altra via da Erdős e altri (1972) (theorem 2, corollary).

Seguono alcuni rilievi sul modo in cui gli elementi di un insieme convesso possono disporsi entro un ordine di massima prossimità.

18. Proposizione: *Siano x un torneo, $\xi = (\xi(1), \dots, \xi(k))$ un suo ordine m.p., H un insieme convesso in x e (H^{C+}, H^{C-}) la relativa bipartizione complementare.*

(i) *Per arbitrari $1 \leq i < j \leq k$ tali che $\xi(i), \xi(j)$ sono termini in H , considerata la collezione $L = \{\xi(l) : i < l < j\}$ dei termini situati entro ξ fra $\xi(i)$ e $\xi(j)$, risulta $|L \cap H^{C+}| = |L \cap H^{C-}|$.*

(ii) *Esiste qualche ordine η connesso a ξ da una catena di traslazioni bilanciate, e perciò esso stesso m.p. per x , entro il quale H costituisce un intervallo tale che $\eta|H = \xi|H$.*

dimostrazione (i) Sia $D = D(x, \xi)$ e supponiamo per semplicità $\xi = \varepsilon = (1, \dots, k)$. Consideriamo in primo luogo il caso in cui non esistano fra i e j termini in H , sicché $L \subseteq H^C$. Ora, se $l \in L \cap H^{C+}$ avremo $\{i, l\} \in D$ e $\{l, j\} \notin D$, mentre per $l \in L \cap H^{C-}$ sarà $\{i, l\} \notin D$ e $\{l, j\} \in D$; ma allora, se fosse $|L \cap H^{C+}| > |L \cap H^{C-}|$ applicando a ε la traslazione destra $[i, j-1]$ otterremmo $d(x, \varepsilon \circ [i, j-1]) < d(x, \varepsilon)$, mentre se $|L \cap H^{C+}| < |L \cap H^{C-}|$ applicando a ε la traslazione sinistra $[j, i+1]$ avremmo $d(x, \varepsilon \circ [j, i+1]) < d(x, \varepsilon)$, eventualità entrambe escluse dall'ipotizzata massima prossimità di ε a x ; dunque $|L \cap H^{C+}| = |L \cap H^{C-}|$. Passando al caso generale, si considerino i termini $i = h_0 < h_1 < \dots < h_p = j$ di H presenti nell'intervallo in ε da i a j , e si ponga $L_r = \{l : h_{r-1} < l < h_r\}$ per $r = 1, \dots, p$; per il risultato appena raggiunto avremo $|L_r \cap H^{C+}| = |L_r \cap H^{C-}|$ per $r = 1, \dots, p$, e quindi $|L \cap H^{C+}| = \sum_{r=1}^p |L_r \cap H^{C+}| = \sum_{r=1}^p |L_r \cap H^{C-}| = |L \cap H^{C-}|$. (ii) Supposto $H = \{h_0, h_1, \dots, h_q\}$ con $h_0 < h_1 < \dots < h_q$ si consideri per $r = 1, \dots, q$ la traslazione sinistra $[h_r, h_0 + r]$ e si costituisca una sequenza di ordini $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_q$ ponendo induttivamente $\xi_0 = \xi = \varepsilon$, e $\xi_r = \xi_{r-1} \circ [h_r, h_0 + r]$ per $r = 1, \dots, q$; riconosciamo senza difficoltà che in $\eta = \xi_q$ gli elementi di H si susseguono nei posti $h_0, h_0 + 1, \dots, h_0 + q$ secondo l'ordine valido in ε , e che per la prima parte dell'enunciato ogni traslazione $[h_r, h_0 + r]$ è bilanciata per l'ordine ξ_{r-1} cui viene applicata. Q.E.D. Dalla parte (ii) dell'enunciato e dalla proposizione 2.i discende il

19. Corollario: *Siano x un torneo e H un suo sottoinsieme convesso; per ξ arbitrario ordine m.p. di x , l'ordine ristretto $\xi|H$ costitui-*

sce a sua volta un ordine m.p. per il sottotorneo $x|H$.

Per congruenza di un torneo x intendiamo una qualsiasi equivalenza $\sim$ sul dominio K tale che i blocchi (o classi di equivalenza) costituenti il relativo quoziente $K/\sim$ siano tutti sottoinsiemi convessi di x ; parliamo di "congruenza" in quanto, espresso il torneo x quale sistema algebrico $(K, \vee, \wedge)$ ponendo $i \vee j = i$ e $i \wedge j = j$ qualora $i \dot{x} j$ per $i, j \in K$, una tale relazione costituisce appunto una congruenza di quel sistema, nell'usuale accezione algebrica del termine (Varlet (1975), Introduction; Müller, Nešetřil & Pelant (1975), §1). Sia $\mathcal{X}(x)$ la famiglia di tutte le congruenze di un torneo x ; sicuramente in questa famiglia figurano, ad esempio, l'identità $=$ e l'equivalenza universale $\approx$ su K , per le quali $K/= \{\{1\}, \dots, \{k\}\}$ e, rispettivamente, $K/\approx = \{K\}$, e la connessità forte $\dot{x}$ del torneo x , il cui quoziente $K/\dot{x}$ è l'insieme delle componenti forti di x ; strutturata secondo il consueto ordine parziale fra equivalenze la famiglia $\mathcal{X}(x)$ risulta costituire un reticolo, appartenente ad un tipo speciale di reticoli distributivi caratterizzato con successo da Müller e altri (1975) (§ 3).

Per un torneo x su K e una generica sua congruenza $\sim$, determinato l'insieme quoziente $K/\sim = \{H_1, \dots, H_m\}$, in corrispondenza ad arbitrari $1 \leq p \neq q \leq m$ si ponga,

$$H_p \dot{x} H_q \text{ sse } i \dot{x} j \text{ per qualche } i \in H_p \text{ e } j \in H_q;$$

si tratta di una definizione univoca, indipendente cioè dalla scelta dei termini i e j , poiché risultando H_p e H_q convessi sarà $i \dot{x} j$ per qualche $i \in H_p$ e $j \in H_q$ soltanto se $i \dot{x} j$ per ogni $i \in H_p$ e $j \in H_q$; una definizione che stabilisce fra i blocchi in $K/\sim$ una relazione $\dot{x}$ irreflessiva, antisimmetrica e completa, e struttura quindi l'insieme quoziente in un torneo $x/\sim = (K/\sim, \dot{x})$, detto *torneo quoziente* di x rispetto a $\sim$. I nodi del torneo quoziente sono i blocchi $H_1, \dots, H_m$, e ciascuno dei suoi archi può essere espresso quale coppia di blocchi (H_p, H_q) ; ogni nodo H_p di $x/\sim$ equivale dunque a un insieme di nodi in x , e similmente ciascun arco (H_p, H_q) di $x/\sim$ condensa un insieme di archi in x , equivalente al prodotto cartesiano $H_p \times H_q$; chiameremo le cardinalità di questi insiemi i *pesi* del nodo H_p e, rispettivamente, dell'arco (H_p, H_q) , il secondo indicato con la scrittura $w(H_p, H_q)$, sicché $w(H_p, H_q) = |H_p| \cdot |H_q|$. Se ora, accanto al definito torneo quoziente, considerassimo pure i sottotornei generati in x dai singoli blocchi della partizione $K/\sim$, che chiameremo *tornei parziali*, saremmo giunti a risolvere il dato torneo x in strutture locali $x|H_1, \dots, x|H_m$ e in una struttura sovraordinata $x/\sim$; è questa la generalizzazione della scomposizione transitiva che si cercava; ne presentiamo di seguito un esempio relativo ad un torneo che secondo la connessità forte è irriducibile.

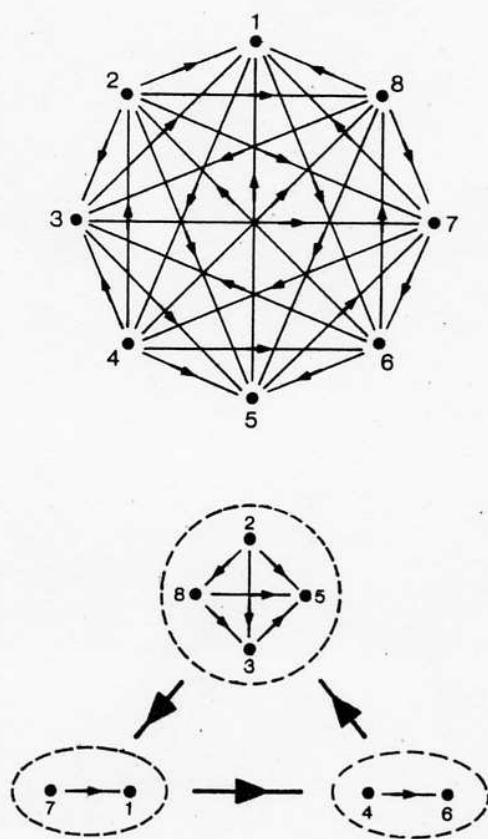


FIGURA 8. Riduzione per congruenza di un torneo forte su $k = 8$ nodi.

Distinguiamo entro la totalità $\mathcal{K}(x)$ delle congruenze di un torneo x la famiglia $\mathcal{K}_Q(x)$ delle congruenze a quoziente transitivo, in base alle quali si ottengono da x tornei quozienti transitivi, e la famiglia $\mathcal{K}_B(x)$ delle congruenze a blocchi transitivi, che circoscrivono entro x tornei parziali tutti transitivi.

20. Proposizione: Entro il reticolo $\mathcal{K}(x)$ delle congruenze di un torneo x le famiglie $\mathcal{K}_Q(x)$ e $\mathcal{K}_B(x)$ ora definite costituiscono un filtro e, rispettivamente, un ideale.

dimostrazione Rileviamo preliminarmente che, come entro il reticolo complessivo delle equivalenze sul dominio K , così nel più ristretto reticolo $\mathcal{K} = \mathcal{K}(x)$ delle congruenze di x , per il meet $\sim \wedge \sim$ fra $\sim, \sim' \in \mathcal{K}$ risulta

$$K / \sim \wedge \sim' = \{E \cap F : E \in K / \sim, F \in K / \sim', E \cap F \neq \emptyset\} \quad (21)$$

e, detta $\mathcal{G}$ la partizione in componenti connesse del grafo - intersezioni sulla famiglia di insiemi $K / \sim \cup K / \sim'$ (cfr. Harary (1969), p.

19), per il join $\sim \vee \sim$, vale

$$K/\sim \vee \sim = \{ \bigcup_{H \in G} H : G \in \mathcal{G} \}. \quad (22)$$

Consideriamo dapprima l'insieme $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}_0(x)$ delle congruenze a quoziente transitivo; si tratta di verificare che $\sim \wedge \sim \in \mathcal{K}_0$ per arbitrarie $\sim, \sim' \in \mathcal{K}_0$ e $\sim \vee \sim' \in \mathcal{K}_0$ per ogni $\sim \in \mathcal{K}_0$ e $\sim' \in \mathcal{K}$. Determinata la scomposizione transitiva $(K_1, \dots, K_m)$ del torneo x , sia ritenuto *intervallare* un qualsiasi insieme $H \subseteq K$ che possa essere espresso quale unione di una sequenza di componenti forti costituente un intervallo in quella scomposizione, per il quale cioè esistano $1 \leq p \leq q \leq m$ tali che $H = \bigcup_{r=p}^q K_r$; si riconosce che unione e intersezione fra intervallari non disgiunti sono intervallari, e che una congruenza possiede quoziente transitivo quando tutti i suoi blocchi siano intervallari. Di qui immediatamente, secondo la (21), $\sim \wedge \sim' \in \mathcal{K}_0$ se $\sim, \sim' \in \mathcal{K}_0$; rimane dunque da verificare, con riferimento alla (22), che ogni blocco $L = \bigcup_{H \in G} H$ di un join $\sim \vee \sim'$ risulta intervallare qualora $\sim \in \mathcal{K}_0$. Disponiamo a tal fine gli insiemi costituenti i nodi della componente connessa G in un ordine $H_1, \dots, H_s$ tale che $H_1 \in K/\sim$ e, posto $L_j = \bigcup_{i=1}^j H_i$, risulti $L_j \cap H_{j+1} \neq \emptyset$ per $j = 1, \dots, s-1$; per ipotesi $L_1 = H_1$ è intervallare; d'altro canto per $j = 1, \dots, s-1$, assunto L_j intervallare, se H_{j+1} possiede termini in più di una componente forte allora stante la proposizione 16 anche H_{j+1} è intervallare, e tale rimarrà $L_{j+1} = L_j \cup H_{j+1}$ in quanto unione fra intervallari non disgiunti, mentre se gli elementi di H_{j+1} provengono da una sola componente forte avremo $H_{j+1} \subseteq L_j$, e nuovamente $L_{j+1} = L_j$ risulta intervallare; ma allora, per induzione, l'insieme $L = L_s$ è intervallare. Passiamo quindi a considerare la famiglia $\mathcal{K}_B = \mathcal{K}_B(x)$ delle congruenze a blocchi transitivi; dobbiamo provare che $\sim \wedge \sim' \in \mathcal{K}_B$ per ogni $\sim \in \mathcal{K}_B$ e $\sim' \in \mathcal{K}$, e che $\sim \vee \sim' \in \mathcal{K}_B$ per arbitrarie $\sim, \sim' \in \mathcal{K}_B$. Innanzitutto, per $E \in K/\sim$ e $F \in K/\sim'$ con $\sim \in \mathcal{K}_B$, siccome $x|E$ risulta transitivo e $x|E \cap F = (x|E)|F$, anche $x|E \cap F$ sarà transitivo; valendo questo argomento per ciascuno dei blocchi in $K/\sim \wedge \sim'$ avremo che $\sim \wedge \sim' \in \mathcal{K}_B$ se $\sim \in \mathcal{K}_B$; rimane dunque da accertare che se $\sim, \sim' \in \mathcal{K}_B$ allora ogni blocco $L = \bigcup_{H \in G} H$ del join $\sim \vee \sim'$ genera in x un sottotorneo transitivo. Ordinata, come sopra, la famiglia di insiemi G in una sequenza $H_1, \dots, H_s$ tale che, posto $L_j = \bigcup_{i=1}^j H_i$, sia $L_j \cap H_{j+1} \neq \emptyset$ per $j = 1, \dots, s-1$, secondo le ipotesi $x|L_1 = x|H_1$ è transitivo; d'altro canto, per $j = 1, \dots, s-1$, supposto $x|L_j$ transitivo, se $L_j \subseteq H_{j+1}$ oppure $H_{j+1} \subseteq L_j$ allora per le ipotesi anche $x|L_{j+1}$ sarà transitivo, giacché $L_{j+1} = H_{j+1}$ in un caso e $L_{j+1} = L_j$ nell'altro; e se, al contrario, $L_j - H_{j+1} \neq \emptyset$ e $H_{j+1} - L_j \neq \emptyset$ allora, per la convessità degli insiemi L_j e H_{j+1} fra loro non disgiunti, entrambe le differenze e l'intersezione

$L_j \cap H_{j+1}$ sono convesse (cfr. Varlet (1975), theorem 1.1) e quindi se $L_j - H_{j+1} \not\propto L_j \cap H_{j+1}$ allora $L_j - H_{j+1} \not\propto H_{j+1} - L_j$ e $L_j \cap H_{j+1} \not\propto H_{j+1} - L_j$, mentre se $L_j \cap H_{j+1} \propto L_j - H_{j+1}$ allora $H_{j+1} - L_j \propto L_j - H_{j+1}$ e $H_{j+1} - L_j \propto L_j \cap H_{j+1}$, sicché in entrambi i casi il sottotorneo $x|_{L_{j+1}}$, ac costamento transitivo di sottotornei transitivi, è transitivo; ma allora, per induzione, anche il sottotorneo $x|_L = x|_{L_S}$ risulterà transitivo. Q.E.D.

La minima congruenza a quoziente transitivo, generatrice in $\mathcal{X}(x)$ del filtro $\mathcal{X}_Q(x)$, è ovviamente la connessità forte del torneo x ; simmetrica per il ruolo e l'importanza appare la congruenza massi ma a blocchi transitivi, generatrice in $\mathcal{X}(x)$ dell'ideale $\mathcal{X}_B(x)$; la riduzione del torneo in figura 8 è compiuta appunto con riferimento alla sua congruenza massima a blocchi transitivi.

Ritornando al tema centrale della ricerca riconosciamo ora che la rettifica di un torneo x può articolarsi, con riferimento ad una sua congruenza $\sim$, in due distinte fasi, nella prima delle quali sia reso transitivo, secondo un conveniente risolutore E , il torneo quoziente $x/\sim$, e nella seconda, in base a specifici risolutori $D_1, \dots, D_m$, vengano rettificati i tornei parziali $x|_{H_1}, \dots, x|_{H_m}$; posto $(x/\sim) \setminus E = (H_{\rho(1)}, \dots, H_{\rho(m)})$ e $(x|_{H_p}) \setminus D_p = \xi_p = (\xi_p(1), \dots, \xi_p(k_p))$ ove $k_p = |H_p|$ per $p = 1, \dots, m$, l'ordine derivabile da x alla detta maniera, che indicheremo con la scrittura $x \setminus (E, D_1, \dots, D_m)$, sarà, evidentemente, l'accostamento seriale secondo ρ degli ordini locali $\xi_1, \dots, \xi_m$, ossia

$$\begin{aligned} x \setminus (E, D_1, \dots, D_m) &= (\xi_{\rho(1)}, \dots, \xi_{\rho(m)}) \\ &= (\xi_{\rho(1)}(1), \dots, \xi_{\rho(1)}(k_{\rho(1)}), \dots, \xi_{\rho(m)}(1), \dots, \xi_{\rho(m)}(k_{\rho(m)})). \end{aligned}$$

L'inversione di un arco $\{H_p, H_q\}$ nella rettifica del torneo quoziente comporta, in riferimento al torneo originario, il capovolgimento dei $w(H_p, H_q) = |H_p| \cdot |H_q|$ archi di x in esso condensati, e corrispondenti alle coppie in $H_p \times H_q$, che possiamo intendere non ordinate essendo H_p e H_q fra loro disgiunti; scriveremo perciò

$$(E, D_1, \dots, D_m) = \left(\bigcup_{\{H_p, H_q\} \in E} H_p \times H_q \right) \cup \bigcup_{p=1}^m D_p$$

a significare che la rettifica in due fasi del torneo x secondo il risolutore composito $(E, D_1, \dots, D_m)$ equivale ad una sua rettifica ordinaria secondo il risolutore dato sulla destra; indicato con $w(E)$ il peso del risolutore E per $x/\sim$, da intendersi quale somma dei pesi degli archi in esso contenuti, sarà evidentemente

$$|(E, D_1, \dots, D_m)| = w(E) + |D_1| + \dots + |D_m|, \quad (23)$$

la cardinalità del risolutore $(E, D_1, \dots, D_m)$ per x è data cioè dalla somma fra il peso $w(E) = \sum_{\{H_p, H_q\} \in E} |H_p| \cdot |H_q|$ del risolutore per il torneo quoziente e le cardinalità $|D_1|, \dots, |D_m|$ dei risolutori per i tornei parziali.

21. Proposizione: *Siano x un torneo, $\sim$ una sua congruenza e $H_1, \dots, H_m$ i blocchi da essa determinati su K , dominio di x . In corrispondenza a qualsiasi ordine η di massima prossimità per x esiste qualche ordine ξ vincolato a η da una catena di traslazioni bilanciate e tale che $\xi = x \setminus (E, D_1, \dots, D_m)$ per un conveniente risolutore E di minimo peso per il torneo quoziente $x/\sim$ e appropriati risolutori $D_1, \dots, D_m$ di minima cardinalità per i tornei parziali $x|_{H_1}, \dots, x|_{H_m}$.*

dimostrazione Posto $\eta = (\eta(1), \dots, \eta(k))$ sia $\rho = (\rho(1), \dots, \rho(m))$ una permutazione sull'insieme $\{1, \dots, m\}$ tale che $H_{\rho(1)}$ contiene $\eta(1)$, $H_{\rho(2)}$ contiene il primo termine in η non appartenente a $H_{\rho(1)}$, $H_{\rho(3)}$ contiene il primo termine in η non appartenente a $H_{\rho(1)} \cup H_{\rho(2)}$, ecc.; sia inoltre $\xi_p = \eta|_{H_p}$ per $p = 1, \dots, m$. Applicando la proposizione 18.ii ripetutamente per $H_{\rho(1)}, \dots, H_{\rho(m)}$, tutti insiemi convessi, riconosciamo l'esistenza di una catena di traslazioni (sinistre) bilanciate che da η portano a $\xi = (\xi_{\rho(1)}, \dots, \xi_{\rho(m)})$; posto $E = D(x/\sim, (H_{\rho(1)}, \dots, H_{\rho(m)}))$ e $D_p = D(x|_{H_p}, \xi_p)$ per $p = 1, \dots, m$, ovviamente $\xi = x \setminus (E, D_1, \dots, D_m)$; il minimo peso di E e la minima cardinalità di $D_1, \dots, D_m$ discendono, in base alla (23) e alla proposizione 2.ii, dalla massima prossimità di ξ a x , garantita a sua volta dall'ipotesi su η e dalla connessità per traslazioni bilanciate fra η e ξ . Q.E.D.

Indicati con $\mathcal{E}$ l'insieme dei risolutori di minimo peso per il torneo quoziente $x/\sim$ e per $p = 1, \dots, m$ con $\mathcal{D}_p$ l'insieme dei risolutori di minima cardinalità per il torneo parziale $x|_{H_p}$, si consideri la famiglia

$$S^0(x) = \{x \setminus (E, D_1, \dots, D_m) : E \in \mathcal{E}, D_1 \in \mathcal{D}_1, \dots, D_m \in \mathcal{D}_m\}$$

degli ordini derivabili da x in base a siffatti risolutori e secondo il processo di rettifica a due stadi sopra definito; dalla precedente proposizione veniamo a sapere non solo che $S^0(x)$ è un insieme di ordini m.p. per il torneo x , ma anche che tale insieme possiede qualche rappresentante in ciascuna delle componenti connesse per traslazione entro l'universo $S(x)$ degli ordini m.p. di x (cfr. penultimo paragrafo di sezione 3), ed è quindi in grado di generare l'intero $S(x)$ per iterate traslazioni bilanciate dei suoi membri. I vantaggi di una rettifica in due fasi appaiono evidenti quando si operi con riferimento ad una congruenza a quoziente transitivo oppure ad una congruenza a blocchi transitivi; nel primo caso infatti, già esemplificato sul torneo in figura 7 con riferimento alla sua

minima congruenza a quoziente transitivo, il primo dei due stadi è risolto in partenza, e la determinazione di un ordine m.p. per x si semplifica nell'individuazione di ordini m.p. per i tornei parziali $x|H_1, \dots, x|H_m$; simmetricamente, nel secondo caso risulta scontato il secondo dei due stadi, e la definizione di un ordine m.p. per x si riduce alla determinazione di un risolutore di minimo peso per il torneo quoziente $x/\sim$; in questo modo, ad esempio, troviamo direttamente che per il torneo in figura 8, già scomposto secondo la sua massima congruenza a blocchi transitivi, la sequenza (4,6,2,8,3,5,7,1) costituisce l'unico ordine di massima prossimità.

6. CONCLUSIONE

Non è raro incontrare nei settori della Psicologia entro i quali si fa uso del linguaggio e del metodo della Matematica, concetti di semplice definizione e di chiaro significato empirico, delle cui proprietà tuttavia poco si conosce; e ciò non tanto per difficoltà intrinseche ad una loro esplorazione sistematica, quanto per la marginalità della loro posizione nell'esistente compartimentazione dei campi di ricerca: concetti utilizzati ma non studiati dagli psicologi e, per altro verso, non conosciuti o comunque non valutati nella loro rilevanza psicometrica dai matematici. E' il caso, ad esempio, dell'indice di Slater e degli ordini di massima prossimità: concetti semplici, nei quali si esprime uno dei modi più diretti e coerenti di trattare i risultati di una comparazione a coppie, e intorno ai quali tuttavia, come si avvertiva nell'Introduzione, esiste una letteratura limitata, composta in prevalenza di studi sugli algoritmi per l'effettiva determinazione di quegli ordini e di quell'indice.

Con la presente ricerca ho inteso contribuire alla sistemazione e allo sviluppo delle conoscenze sui citati concetti psicometrici. Si è provveduto innanzitutto a situare i due concetti in un naturale riquadro teorico, interno alla Teoria dei Tornei e, più in generale, alla Teoria dei Grafi Diretti, e a formulare una specifica terminologia per una loro trattazione sistematica; sono state quindi stabilite matematicamente varie nuove proprietà di quei concetti, ed altre proprietà già note sono state richiamate in luoghi appropriati. Ne dovrebbero risultare chiariti il funzionamento e il significato del metodo di Slater per l'ordinamento su comparazione a coppie; un metodo che, di carattere essenzialmente combinatorio, gode di un'ampia indipendenza dalle consuete assunzioni probabilistiche, e si presenta quindi emblematico di un genere di Psicomètria non propriamente statistico.

BIBLIOGRAFIA

- AIGNER, M., (1979). Combinatorial theory. Springer, Berlin.
- BEZEMBINDER, T.G.G., (1981). Circularity and consistency in paired comparisons. British Journal of Mathematical and Statistical Psychology, 34, 16-29.
- BRUNK, H.D., (1960). Mathematical models for ranking from paired comparisons. Journal of the American Statistical Association, 55, 503-520.
- CAMION, P., (1959). Chemins et circuits hamiltoniens des graphes complets. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, 249, 2151-2152.
- DE CANI, J.S., (1969). Maximum likelihood paired comparison ranking by linear programming. Biometrika, 56, 537-545.
- DE CANI, J.S., (1972). A branch and bound algorithm for maximum likelihood paired comparison ranking. Biometrika, 59, 131-135.
- ERDÖS, P., FRIED, E., HAJNAL, A., & MILNER, E.C., (1972). Some remarks on simple tournaments. Algebra Universalis, 2, 238-245.
- ERDÖS, P., & MOON, W., (1965). On sets of consistent arcs in tournaments. Canadian Mathematical Bulletin, 8, 269-271.
- GUTTMAN, L., (1946). An approach for quantifying paired comparisons and rank order. Annals of Mathematical Statistics, 17, 144-163.
- HARARY, F., (1969). Graph theory. Addison-Wesley, Reading (Massachusetts).
- HARARY, F., NORMAN, R.Z., & CARTWRIGHT, D., (1965). Structural models: an introduction to the theory of directed graphs. Wiley, New York.
- KENDALL, M.G., (1955). Further contributions to the theory of paired comparisons. Biometrics, 11, 43-62.
- KENDALL, M.G., & BABINGTON SMITH, B., (1940). On the method of paired comparisons. Biometrika, 31, 324-345.
- LANDAU, H.G., (1953). On dominance relations and the structure of animal society. III: The condition for a score sequence. Bulletin of Mathematical Biophysics, 15, 114-148.
- MOON, J.W., (1968). Topics on tournaments. Holt, Rinehart & Winston, New York.
- MÜLLER, V., NEŠETŘIL, J., & PELANT, J., (1975). Either tournaments

or algebras? Discrete Mathematics, 11, 37-66.

PHILLIPS, J.P.N., (1967). A procedure for determining Slater's i and all nearest adjoining orders. British Journal of Mathematical and Statistical Psychology, 20, 217-225.

PHILLIPS, J.P.N., (1969). A further procedure for determining Slater's i and all nearest adjoining orders. British Journal of Mathematical and Statistical Psychology, 22, 97-101.

PHILLIPS, J.P.N., (1976). On an algorithm of Smith and Payne for determining Slater's i and all nearest adjoining orders. British Journal of Mathematical and Statistical Psychology, 29, 126 - 127.

RANYARD, R.H., (1976). An algorithm for maximum likelihood ranking and Slater's i from paired comparisons. British Journal of Mathematical and Statistical Psychology, 29, 242-248.

REMADE, R., & THOMPSON, W.A., (1966). Maximum-likelihood paired comparison rankings. Biometrika, 53, 143-149.

SLATER, P., (1961). Inconsistencies in a schedule of paired comparisons. Biometrika, 48, 303-312.

SMITH, A.F.M., & PAYNE, C.D., (1974). An algorithm for determining Slater's i and all nearest adjoining orders. British Journal of Mathematical and Statistical Psychology, 27, 49-52.

VARLET, J.C., (1975). Some algebraic aspects of tournament theory. Colloquium Mathematicum, 33, 189-199.

Luigi BURIGANA è professore associato di Psicometria presso l'Istituto di Psicologia della facoltà di Magistero dell'Università di Padova.

Il redattore: Marco Sambin

Il direttore dell'istituto di Psicologia: Giovanni B. Vicario