

**AIMETA**

ASSOCIAZIONE ITALIANA  
DI MECCANICA TEORICA  
E APPLICATA

Sezione Italiana  
della International Union  
of Theoretical and Applied  
Mechanics, IUTAM

**SECONDO CONVEGNO  
ITALIANO  
DI MECCANICA  
COMPUTAZIONALE**

Università di Roma "La Sapienza"  
Facoltà di Ingegneria

2-5 giugno 1987

Con il contributo di  
Università di Roma "La Sapienza"  
Consiglio Nazionale delle Ricerche  
Istituto Bancario S. Paolo di Torino  
Aeritalia

## 1-INTRODUZIONE

Allo scopo di superare alcuni dei problemi (numero dei dati campionati, risoluzione in frequenza, necessità di zoom) che si presentano con i metodi di analisi tradizionale e, in particolare per riconoscere componenti con frequenze molto vicine tra di loro presenti in un segnale con rumore è stato implementato un programma di calcolo che permette l'analisi in frequenza di segnali con un'elevata risoluzione e necessita di un numero di dati campionati inferiore rispetto ai metodi tradizionali. Tra le varie possibilità offerte dagli algoritmi di analisi sviluppati negli ultimi anni si è scelto il metodo della massima entropia (MEM o MESA) [4,6,7,15,18,19] e si è voluto controllare se effettivamente tale metodo consente una risoluzione più spinta rispetto ai metodi tradizionali e se permette di utilizzare un numero di dati inferiore [22].

## 2-L' ANALISI SPETTRALE A MASSIMA ENTROPIA

Il metodo di analisi in frequenza chiamato MESA si basa sull'ipotesi che la funzione di autocorrelazione  $\Phi$  non deve essere assunta nulla negli intervalli temporali esterni a quelli considerati (come avveniva nella tecnica utilizzata nei primi analizzatori), bensì deve essere introdotta una stima della stessa basandosi sulle stime precedentemente calcolate mediante i dati noti e senza effettuare alcuna pesatura tramite opportune funzioni di filtraggio [6,7] come, invece, richiede di solito l'analisi di Fourier.

Quindi, secondo quanto proposto da Burg [6,7], si deve selezionare tra tutti i possibili spettri che si accordano con i valori stimati della funzione di autocorrelazione quello che ha la più grande casualità, o massima entropia. Per poter stimare i valori della funzione di autocorrelazione è necessario applicare al processo in esame un modello di tipo statistico, che è di tipo autoregressivo. L'utilizzo del metodo di analisi in frequenza MESA è giustificato dal fatto, dimostrabile [19], che questo metodo è equivalente a quelli autoregressivi. È molto utile, quindi, poter effettuare la determinazione dei coefficienti autoregressivi ( $a_{mn}$ ) direttamente dai dati campionati senza passare per il calcolo delle funzioni di autocorrelazione, né per calcolare lo spettro di potenza, né per calcolare i coefficienti autoregressivi.

È stato scritto un programma in FORTRAN77 su un calcolatore DEC Vax 750 utilizzando l'algoritmo di Burg [4,6,7] per il calcolo dei coefficienti autoregressivi, mentre per il calcolo della densità spettrale di potenza si è utilizzata la seguente espressione:

$$P(f) = \frac{P_m / W}{\left| 1 - \sum_{n=1}^m a_{mn} e^{-j2\pi f \Delta t} \right|^2} \quad (1)$$

La frequenza  $f$  è limitata dalla frequenza di Nyquist,  $f \leq W = 1/(2\Delta t)$ .

$P_m$ , che è la potenza dell'errore del filtro di predizione di ordine  $m$ , e i coefficienti  $a_{mn}$  sono legati dalla seguente equazione [14]:

$$[\Phi] \{-a\} = \{P\} \quad (2)$$

dove  $[\Phi]$  rappresenta la matrice di autocorrelazione,  $-a_{m0}=1$  e  $\{P\} = (P_m, 0, \dots, 0)$ . Questa equazione potrebbe essere risolta per iterazioni successive partendo con il valore di  $P_0$  ricavato [14] dalla:

$$P_0 = \Phi(0) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N x_t^2 \quad (3)$$

La equazione (2) ha  $m+2$  incognite ( $a_{m1}, \dots, a_{mm}, \Phi(m), P_m$ ) ed è costituita da  $m+1$  equazioni. Perché la soluzione sia unica è richiesta un'altra equazione. A tale scopo si impone che la potenza dell'errore del filtro predittore di ordine  $m$  sia minima. La potenza dell'errore viene espressa come valore medio dell'errore che si ha facendo funzionare il filtro predittore prima in un senso e poi in

(\*) Istituto di Meccanica Applicata alle Macchine - Università di Padova.

senso inverso, come dimostrato da Claerbout [9]. La potenza dell' errore così calcolata é resa minima dal seguente valore di  $a_{mm}$  :

$$a_{mm} = 2 \frac{\sum_{t=1}^{N-m} b_{mt} b'_{mt}}{\sum_{t=1}^{N-m} (b_{mt}^2 + b'_{mt}{}^2)} \quad (4)$$

dove

$$\begin{aligned} b_{mt} &= b_{m-1 t} - a_{m-1 m-1} b'_{m-1 t} \\ b'_{mt} &= b'_{m-1 t+1} - a_{m-1 m-1} b_{m-1 t+1} \\ b_{0t} &= b'_{0t} = x_t \quad t=1, \dots, N \end{aligned} \quad (5)$$

Gli altri coefficienti del filtro di ordine  $m$  vengono determinati da quelli del filtro di ordine  $m-1$  per mezzo dell' equazione[14]:

$$a_{mk} = a_{m-1 k} - a_{mm} a_{m-1 m-k} \quad k=1, \dots, m-1 \quad (6)$$

Si assumono inoltre  $a_{m0} = -1$  e  $a_{mk} = 0$  per  $k \geq m$ . Operando in tale modo é possibile ottenere la seguente espressione recursiva per il calcolo di  $P_m$  [6,7,13]:

$$P_m = P_{m-1} (1 - a_{mm}^2) \quad (7)$$

La scelta del ordine  $m$  del processo può influire decisamente sul calcolo della densità spettrale di potenza. Infatti un ordine troppo basso dà una stima dello spettro estremamente piatta, mentre un ordine troppo alto può introdurre le cosiddette "line splitting" nel calcolo dello spettro, cioè la comparsa di linee spettrali fantasma. Viene per questo introdotto un criterio dovuto ad Akaike [1,2] che va sotto il nome di FPE (Final Prediction Error) che calcola il numero ottimale dei coefficienti autoregressivi. L'FPE viene così definito:

$$(FPE)_m = \frac{N+m}{N-m} P_m \quad (8)$$

Quindi si dovrà calcolare l'FPE per ogni ordine  $m$  del processo autoregressivo e scegliere fra questi quello minore. In pratica l'FPE non verrà calcolato per ogni  $m$  che varia da 1 a  $N-1$  ma solamente per i valori di  $m$  compresi fra 0 e  $N/3$  oppure fra 0 e  $N/2$  in quanto dopo un certo valore di  $m$  l'FPE rimane praticamente costante [13].

### 3-RISULTATI

Verranno ora confrontate le prestazioni del metodo MESA con quelle della FFT. I test effettuati riguardano l' analisi in frequenza di un segnale formato dalla somma di due sinusoidi e di rumore bianco: la differenza tra le due frequenze é stata ridotta gradualmente in modo da determinare la risoluzione massima offerta da ciascun metodo.

Il primo test eseguito ha riguardato segnali con un livello di rumore sovrapposto pari al 10% del segnale pulito e in tali condizioni si é rilevata la risoluzione massima offerta dai due metodi per un numero di campioni pari a  $N=64,128,256,512$  (Tab.1).

N°Dati	Frequenze reali [Hz]		Risultato MESA [Hz]				Risultato FFT [Hz]			
	1 <sup>a</sup>	2 <sup>a</sup>	1 <sup>a</sup>	Err.(%)	2 <sup>a</sup>	Err.(%)	1 <sup>a</sup>	Err.(%)	2 <sup>a</sup>	Err.(%)
64	4.8000	5.2000	4.8400	0.833	5.1950	-0.096	4.6875	-2.344	5.3125	2.163
128	4.8000	5.2000	4.8010	0.021	5.2030	0.058	4.8438	0.913	5.1560	-0.846
256	4.9000	5.1000	4.8980	-0.041	5.1050	-0.098	4.9219	0.447	5.0781	-0.429
256	4.9500	5.0500	4.9480	-0.040	5.0410	-0.178	4.9219	-0.568	5.0781	0.556
256	4.9750	5.0250	4.9720	-0.060	5.0340	0.179	risolve 1 frequenza(*)			
512	4.9750	5.0250	4.9790	0.080	5.0240	-0.020	4.9609	-0.283	5.0391	0.281
512	4.9875	5.0125	4.9860	-0.030	5.0160	0.070	risolve 1 frequenza(*)			

(\*) risoluzione necessaria inferiore a quella della FFT

Tab.1- Confronto tra il metodo MESA e la FFT: calcolo degli errori nella determinazione delle frequenze.

Un secondo test é stato effettuato utilizzando pochi dati campionati (64) di un segnale nel quale era presente un livello di rumore sempre più elevato (10%,20%,30%,40%).

Rumore	Frequenze reali [Hz]		Risultato MESA [Hz]				Risultato FFT [Hz]			
	1 <sup>a</sup>	2 <sup>a</sup>	1 <sup>a</sup>	Err.(%)	2 <sup>a</sup>	Err.(%)	1 <sup>a</sup>	Err.(%)	2 <sup>a</sup>	Err.(%)
10%	4.8500	5.1500	4.8430	-0.144	5.1740	0.466	4.6875	-3.350	5.3125	3.155
20%	4.8500	5.1500	4.8460	-0.082	5.1900	0.777	4.6875	-3.350	5.3125	3.155
30%	4.8500	5.1500	4.8450	-0.103	5.2030	1.029	4.6875	-3.350	5.3125	3.155
40%	4.8500	5.1500	4.9430	-0.144	5.2140	1.243	4.6875	-3.350	5.3125	3.155
10%	4.9500	5.0500	4.9270	-0.465	5.0840	0.673	risolve 1 frequenza(*)			
20%	4.9500	5.0500	4.9390	-0.222	5.1110	1.208	risolve 1 frequenza(*)			
30%	4.9500	5.0500	4.9510	0.020	5.1390	1.762	risolve 1 frequenza(*)			
40%	4.9500	5.0500	4.9620	0.242	5.1630	2.238	risolve 1 frequenza(*)			

(\*) risoluzione necessaria inferiore a quella della FFT

Tab.2- Confronto tra il metodo MESA e la FFT: calcolo degli errori nella determinazione delle frequenze al variare del livello di rumore presente, utilizzando 64 dati campionati.

Anche in questo caso si é evidenziata la efficacia del MESA nel calcolo dello spettro: i picchi sono più stretti, la loro larghezza come pure la frequenza centrale del picco dipendono dal livello di rumore presente nel segnale, anche se gli errori nella determinazione della frequenza sono sempre inferiori a quelli rilevati dalla FFT e, inoltre, il metodo MESA é meno sensibile al livello di rumore presente (Tab.2).

Un terzo test ha permesso di constatare che nella determinazione dello spettro di un' onda quadra con soltanto 256 dati campionati: il metodo MESA (Tab.3) individua le armoniche con una precisione maggiore rispetto alla FFT (Tab.4).

Rumore	Frequenze reali [Hz]				Risultato MESA [Hz]							
	1 <sup>a</sup>	2 <sup>a</sup>	3 <sup>a</sup>	4 <sup>a</sup>	1 <sup>a</sup>	Err.(%)	2 <sup>a</sup>	Err.(%)	3 <sup>a</sup>	Err.(%)	4 <sup>a</sup>	Err.(%)
20%	1.	3.	5.	7.	0.9810	-1.900	2.9680	-0.400	4.9990	-0.020	6.9660	-0.486
30%	1.	3.	5.	7.	0.9945	-0.550	3.0110	0.367	5.0040	0.080	6.9440	-0.800

Tab.3- Calcolo degli errori nella determinazione delle frequenze del metodo MESA al variare del livello di rumore presente, utilizzando 64 dati campionati nel caso di un onda quadra.

Rumore	Frequenze reali [Hz]				Risultato FFT [Hz]							
	1 <sup>a</sup>	2 <sup>a</sup>	3 <sup>a</sup>	4 <sup>a</sup>	1 <sup>a</sup>	Err.(%)	2 <sup>a</sup>	Err.(%)	3 <sup>a</sup>	Err.(%)	4 <sup>a</sup>	Err.(%)
20%	1.	3.	5.	7.	0.9375	-6.250	3.1250	4.167	5.0000	0.000	6.8750	-1.786
30%	1.	3.	5.	7.	0.9375	-6.250	3.1250	4.167	5.0000	0.000	6.8750	-1.786

Tab.4- Calcolo degli errori nella determinazione delle frequenze del metodo FFT al variare del livello di rumore presente,utilizzando 64 dati campionati nel caso di un onda quadra.

Infine si é applicato il MESA ad un segnale rilevato sperimentalmente. Nel caso in esame si voleva valutare l' influenza di un intaglio in una barra di sezione rettangolare sulla propagazione delle onde longitudinali eccitate mediante l' urto di una massa nel punto centrale di una delle sezioni di

estremità della barra. All' altro estremo della barra è stato installato un accelerometro e si sono rilevate le vibrazioni longitudinali della barra sia nel caso di barra priva di intaglio, sia nel caso di barra con un intaglio (Fig.1) presente ad una distanza dalla sezione di eccitazione pari al 60% della lunghezza complessiva della barra. Tale intaglio è servito a simulare la presenza di cricche nella barra stessa. Anche in questo caso il MESA ha offerto una risoluzione più spinta di quella teorica della FFT con lo stesso numero di campioni (Figg.2+3), nonché il grande vantaggio di permettere un immediato zoom (Fig.4) nell' intorno di una qualsiasi frequenza esaminata. Utilizzando il metodo MESA si è potuto riscontrare la comparsa di un secondo picco adiacente a quelli principali nel caso della barra in cui è presente l' intaglio. Tale fenomeno è stato interpretato come una riflessione dell' onda elastica all' interno della barra stessa.

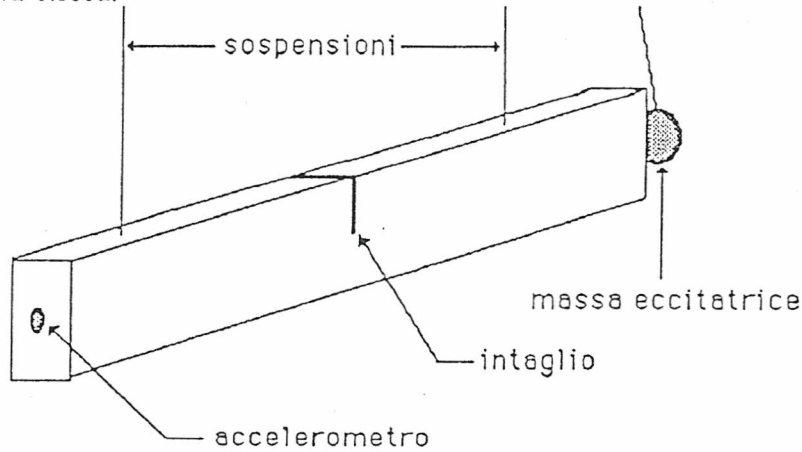


Fig.1-Barra con intaglio.

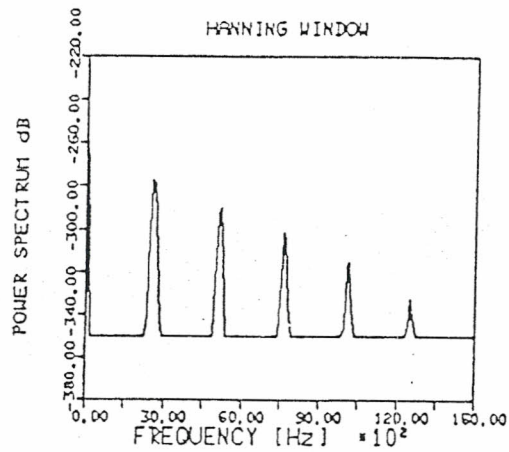
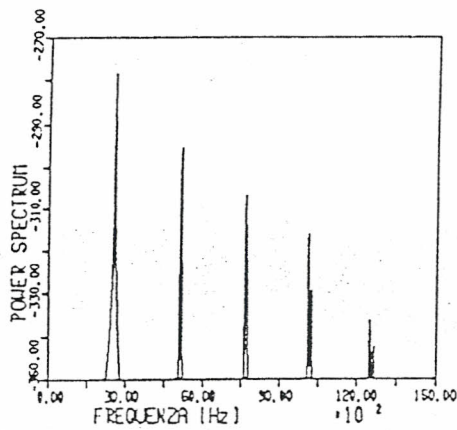


Fig.2-Spettro di potenza calcolato dal MESA(a) e dalla FFT(b) della vibrazione di una barra senza intaglio(1000 dati).

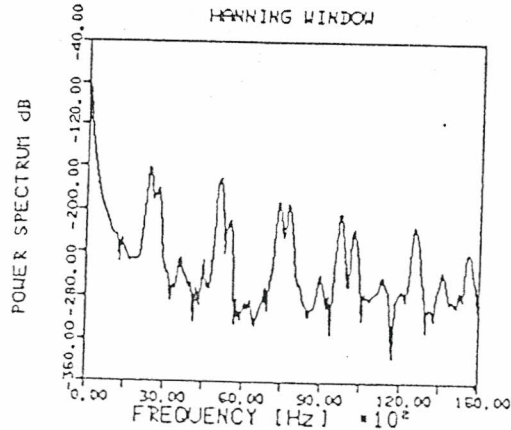
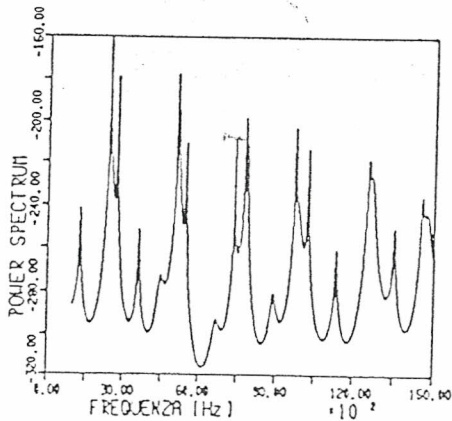


Fig.3-Spettro di potenza calcolato dal MESA(a) e dalla FFT(b) della vibrazione di una barra con intaglio (1000 dati).

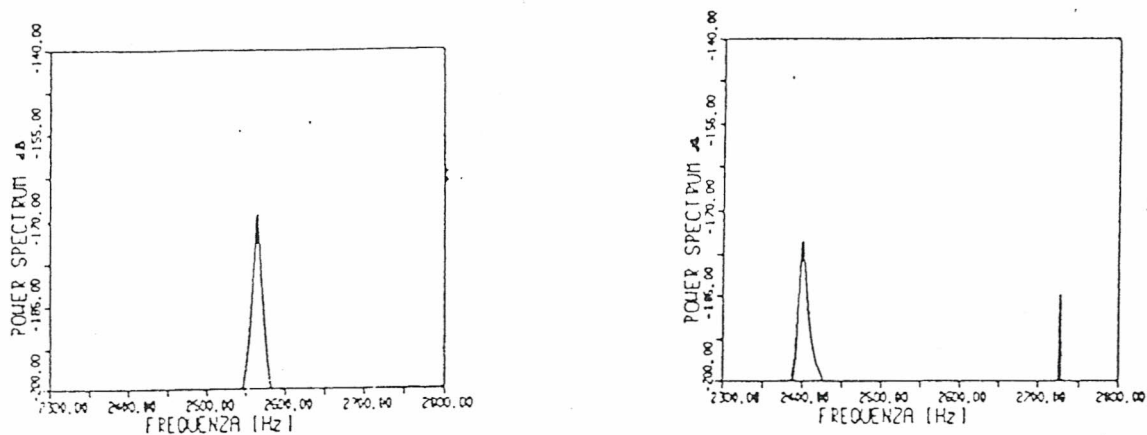


Fig.4-Spettro di potenza calcolato dal MESA della vibrazione di una barra senza(a) e con(b) intaglio nell' intervallo di frequenze 2300+2800 Hz.

#### 4-CONCLUSIONI

Dal confronto dei risultati si può affermare che il metodo MESA offre una risoluzione più spinta della tradizionale FFT e, in particolar modo, è estremamente utile nel caso in cui si disponga di un numero ridotto di dati campionati. Tale metodo è, inoltre, meno sensibile alla presenza di rumore nel segnale, anche se all' aumento del livello di rumore consegue un peggioramento delle prestazioni del MESA. Un vantaggio che lo rende potente e superiore rispetto alla FFT è la possibilità di operare uno zoom in un intorno a piacere di una qualsiasi frequenza, senza necessità alcuna di rieffettuare il campionamento dei dati.

Il MESA presenta invece qualche difficoltà nella determinazione precisa dell' ampiezza dei picchi che è influenzata sia dal livello di rumore presente, sia dall' ordine del filtro AR che approssima il modello ARMA: si è riscontrato, comunque, che talvolta tale errore è legato al basso numero di linee spettrali calcolate: è stato sufficiente elevare tale numero per diminuire in modo considerevole tale errore. Senza dubbio sotto quest' ultimo aspetto è più precisa la FFT, soprattutto perché è possibile valutare in modo preciso gli errori associati alla applicazione di una particolare finestra.

Per quanto riguarda il criterio per la scelta dell' ordine del filtro che approssima il processo ARMA si è riscontrata la validità dell' FPE(Final Prediction Error), limitando però l' ordine a circa la metà del numero dei dati campionati. Oltre tale valore infatti l' FPE può essere ancora decrescente, ma la variazione è così piccola che i vantaggi sono del tutto sproporzionati rispetto all' appesantimento del calcolo che ne consegue.

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] Akaike H., "A new look at the statistical model identification," IEEE Trans. Automatic Control, vol. AC-19, pp. 716-723, Dec. 1974.
- [2] Akaike H., "Use of information theoretic quantity for statistical model identification," Proc. 5th Hawaii Int. Conf. System Sciences, pp. 249-250, 1972.
- [3] Anderson N., "On the calculation of filter coefficients for maximum entropy spectral analysis," Geophysics, vol. 39, pp. 69-72, Feb. 1974.
- [4] Barnard T.E., "The maximum entropy spectrum and the Burg technique", Technical Report N°1, Advanced Signal Processing, Texas Instruments Inc., prepared for Office of Naval Research, ALEX(03)-TR-75-01, 25 June 1975.
- [5] Blackman R.B. - Tukey J.W., "The measurement of power spectra", Dover Publications, Inc., New York, 1958.
- [6] Burg J.P., "Maximum entropy spectral analysis," paper presented at the 37th Annual International Meeting, Society of Exploration Geophysicists, Oklahoma City, Oklahoma, 31 October 1967.
- [7] Burg J.P., "Maximum entropy spectral analysis", Ph.D. dissertation, Department of Geophysics, Stanford University, Stanford, California, May 1975.
- [8] Cariolaro G. e Pierobon G., "Teoria delle Probabilità e dei processi aleatori", vol.1 e 2, Pàtron Editore, Bologna.
- [9] Claerhout J.F., "Fundamentals of Geophysical Data Processing", McGraw-Hill New York, 1976.
- [10] Edward J.A. and Fitelson M.M., "Notes on maximum entropy processing", IEEE Trans. Information Theory, vol.IT-19, pp. 232-234, March 1973.
- [11] Gutowski P.R., Robinson E.A. and Treitel S., "Spectral estimation: fact or fiction", IEEE Trans. Geosc. Electron., vol. GE-16, pp. 80-84, April 1978.

- [12] Haykin S. and Kesler S., "The complex form of the maximum entropy method for spectral estimation", Proc. IEEE, vol. 64, pp. 822-823, May 1976.
- [13] Jones R.H., "Autoregression order selection," Geophysics, vol.41, pp. 771-773, Aug. 1976.
- [14] Marple S.L. Jr., "Conventional Fourier, Autoregressive, and special ARMA methods, of spectrum analysis, Stanford University, 1976.
- [15] Marple S.L. Jr., "A New Autoregressive Spectrum Analysis Algorithm," IEEE Trans., Acoust., Speech, and Signal Processing, vol. ASSP-28, NO.4, August 1980.
- [16] Priestley M.B., "The spectrum of a continuous process derived from a discrete process", Biometrika, vol. 50, pp; 517-520, 1963.
- [17] Tretter S.A. and Steiglitz K., "Power spectrum identification in terms of rational models", IEEE Trans. Automatic Control, vol. AC-12, pp. 185-188, April 1967
- [18] Ulrych T.J. and Bishop T.N., "Maximum entropy spectral analysis and autoregressive decomposition," Rev. Geophys. Space Phys., vol.13, pp. 183-200, Feb. 1975.
- [19] Van den Bos A., "Alternative interpretation of maximum entropy spectral analysis," IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 17, pp. 493-494, 1981.
- [20] Whitman E.C., "The spectral analysis of discrete time series in terms of linear regressive models", Naval Ordinance Labs Report NOLTR-70-109, White Oak, Maryland, 23 June 1974.
- [21] Whittle P., "On the fitting of multivariate autoregressions and the approximate canonical factorization of a spectral density matrix", Biometrika, vol.50 (Parts 1 and 2) pp.129-134, 1963.
- [22] Bolla E., "Applicazione di tecniche autoregressive per l' analisi in frequenza di fenomeni vibratorii", Tesi di laurea Ist. Meccanica Applicata alle Macchine Padova, 1986.